

Deutsche Seewarte.

AUS DEM
ARCHIV DER DEUTSCHEN SEEWARTE
XLIII. Jahrgang, 1925.

Nr. 2

Theorie der Haupthalos

von

Alfred Wegener.

HAMBURG 1926.

Druck von Schacht & Westerich, Hamburg.

Vertrieb L. FRIEDERICHSEN & CO., Hamburg.

Veröffentlichungen der Deutschen Seewarte.

Verlag L. Friederichsen & Co. in Hamburg.

	Reichsmark
Segelhandbuch für den Atlantischen Ozean. 3. Aufl. Hamburg 1910	20.—
Segelhandbuch für den Stillen Ozean. Hamburg 1897	36.—
Stiller Ozean. Ein Atlas von 31 Karten. Hamburg 1896	25.—
Der Kompaß an Bord. 2. umgearb. u. verm. Auflage. Hamburg 1906	3.—
Atlas der Stromversetzungen auf den wichtigsten Dampferwegen im Indischen Ozean und in den Ostasiatischen Gewässern. 1905.	15.—

Verlag E. S. Mittler & Sohn, Berlin.

Jahresbericht der Deutschen Seewarte. Jahrgang 16—47. 1894—1925. (Jahrgang 1 bis 15 im Archiv). Je Heft	0.50
Sach- und Namen-Register der Jahrgänge 1889—1902, 1903—1920 d. »Ann. d. Hydr. usw.«	1.—
Beiträge zur Küstenkunde (S. Abdr. aus »Ann. d. Hydr. usw.«) Nr. 1—7. Berlin 1910—16. Jede Nummer geh.	2.—
Gezeitentafeln für das Jahr 1926. Ausgabe A, geh.	15.75
Ausgabe B, geh.	9.75
Tabellarische Reiseberichte nach den meteorologischen Schiffstagebüchern. Band I—VIII. Eingänge von 1903—1910. Jeder Band.	3.—
Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. Jährlich.	7.20

Verlag Eckardt & Messtorff, Hamburg.

Atlas der Gezeiten und Gezeitenströme für das Gebiet der Nordsee, des Kanals und der Britischen Gewässer. Hamburg 1925. Neubearbeitung	20.—
Monatskarte für den Nordatlantischen Ozean	—
Der Pilote, neue Folge, Heft 1—10 je Heft	3.—

Seedienst-Verlag, Hamburg 1.

Der Pilote, neue Folge, Heft 11 und folgende je Heft	3.—
--	-----

Verlag Hammerich & Lesser, Altona.

„Funkwetter“, Liste und Schlüssel der Wetterfunksprüche, funkentelegraphische Zeitsignale und Eismeldungen, 7. Aufl.	5.—
--	-----

Vertrieb L. Friederichsen & Co., Hamburg.

Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte. I. bis XLII. Jahrg. 4 ^o . Hamburg 1878—1924. (Zum Teil vergriffen.) Jeder Jahrgang	10.—
Resultate meteorologischer Beobachtungen von deutschen und holländischen Schiffen für Eingradfelder des Nordatlantischen Ozeans. 19 Bände. 4 ^o . Hamburg 1880—1901 je Band	10.—
Atlas der Meeresströmungen in dem Indischen Ozean. Hamburg 1913	15.—
Meteorologische Beobachtungen in Deutschland von Stationen II. Ordnung usw. Jeder Jahrgang	13.—
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch. Beobachtungssystem der Deutschen Seewarte. Jahrgang 1887—1920. 4 ^o . Hamburg 1881—1922. Jeder Jahrgang	13.—
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im System der Deutschen Seewarte für die Lustren 1876—1880, 1881—1885, 1886—1890, 1891—1895, 1896—1900, 1901—1905, 1906—1910, für die Dezennien 1876—1885, 1886—1895, 1896—1905 und für die 25 Jahre 1876—1900. Preis je	3.—
Katalog der Bibliothek der Deutschen Seewarte. 8 ^o . Hamburg 1890	10.—
Jeder Nachtrag	3.—
Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. Heft 1—23. 4 ^o . Hamburg 1887—1922. Jedes Heft	8.—

Vertrieb Eckardt & Messtorff, Hamburg.

Monatskarte für den Indischen Ozean. 2. Auflage. 12 Monate und Distanzkarte	15.—
Seehandbuch für den Indischen Ozean mit Entfernungs- und Wegekarte	2.—
Dampferhandbuch für den Stillen Ozean. 1922	6.—

Von der Seewarte unmittelbar zu beziehen.

Tägliche synoptische Wetterkarten für den Nordatlantischen Ozean usw. 2.—29. Jahrgang. Preis für den Jahrgang 40 dänische Kronen. Hierzu:	
Vierteljahrs-Wetter-Rundschau 1883—1894, Band I—X, sonst unverkäuflich.	
Resultate meteorologischer Beobachtungen von deutschen und holländischen Schiffen für Eingradfelder des Nordatlantischen Ozeans. 20. Band. Quadrat 145. Hamburg 1921	10.—
Kurze Anweisungen für Segelschiffe auf Zwischenreisen im Stillen Ozean. Hamburg 1913	1.—
Vorschriften für die Prüfung von Schiffspositions-Laternen. Hamburg 1906	1.—
Untersuchungen über Sichtweite und Helligkeit der Schiffspositions-Laternen mit besonderer Rücksicht auf die richtige Färbung der Gläser. Hamburg 1894	3.—

Karten der magnetischen Deklination für 1917, Inklination für 1920 und Horizontalintensität für 1905, herausgegeben vom Reichs-Marine-Amt. Vertrieb durch Dietrich Reimer, Berlin.	
Tägliche Wetterberichte der Deutschen Seewarte. Nur Postbezug. Preis monatlich	5.—
Schiffswetterkarten. Nur Postbezug. Preis monatlich	0.50
Zehntägiger Witterungsbericht für die Landwirtschaft. Jahrgang I—XXI 1902—1923. Erscheint vorläufig nicht.	

Deutsche Seewarte.

AUS DEM
ARCHIV DER DEUTSCHEN SEEWARTE
XLIII. Jahrgang, 1925.

Nr. 2

Theorie der Haupthalos

von
Alfred Wegener.

HAMBURG 1926.

Druck von Schacht & Westerich, Hamburg.

Inhalt.

	Seite
1. Einleitung	3
2. Allgemeines über die Lichtbrechung in Eiskristallen	4
3. Das System der Haupthalos	5
4. Der Nebensonnenhalo	6
5. Der umschriebene Halo	10
6. Der kleine Ring und der große Ring	14
7. Der Zirkumzenitalbogen	15
8. Die seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes	18
9. Spiegelhalos mit einfacher Spiegelung	22
10. Spiegelhalos mit doppelter Spiegelung	24
11. Halos, die auf Spiegelung und Brechung beruhen	26
12. Der Halo von Parry	29

1. Einleitung.

Im folgenden werden nur die einfachsten Annahmen über Gestalt und Orientierung der Eiskristalle zugrunde gelegt, die dadurch entstehenden Haupthalos aber möglichst vollständig im Zusammenhang behandelt.

Es wird insbesondere angenommen, daß die Eiskristalle aus regelmäßigen 6seitigen Prismen bestehen. Von sternartigen Auszackungen, Pyramidenaufsätzen und anderen Komplikationen wird abgesehen. Bekanntlich variiert das hexagonale Prisma zwischen den beiden extremen Formen des Plättchens mit kurzer und des Säulchens mit langer Hauptachse, wodurch ihre Orientierung in der Luft beeinflusst wird, da die Kristalle in der Luft auf ihrer Breitseite liegen. Da aber sehr häufig Kombinationen beider Formen auftreten, indem die Säulchen am Ende ein Plättchen tragen, das beim Herabsinken als Fallschirm wirkt, wird im folgenden von der speziellen Ausbildung des Prismas überhaupt nicht die Rede sein, sondern nur von der Orientierung der Kristallachsen. In dieser Hinsicht wird nur zwischen den 3 Fällen unterschieden werden: Hauptachse vertikal, horizontal oder in idealer Unordnung. Die Nebenachsen können gegenüber der Hauptachse jedenfalls nur eine sehr geringe orientierende Wirkung haben, so daß auf diese Weise nur wenige lichtschwache Halos entstehen können. Zum System der Haupthalos können diese kaum gezählt werden. Bei letzteren können wir uns daher stets die Kristalle um ihre Hauptachse rotierend denken. Auch von Schwankungen und Pendelungen der Kristalle soll — im Gegensatz zu den bisherigen Theorien — ganz abgesehen werden. Hiermit soll zwar keineswegs das Vorkommen solcher Schwankungen geleugnet werden. Es ist aber leicht einzusehen, daß dieselben, sofern man nicht besondere, schwer zu begründende Annahmen über ihre Art und Weise macht, wesentlich nur die Wirkung haben können, daß außer dem durch die bevorzugte Orientierung erzeugten Berührungsbogen noch in der Nachbarschaft des Berührungspunktes ein Stück des auf ungeordneter Orientierung beruhenden invariablen Sonnenringes entstehen muß. In der Tat stimmt dies mit der Beobachtung überein, daß bei Anwesenheit der Nebenachsen fast stets auch die benachbarten Stücke des kleinen Ringes, bei Anwesenheit des Zirkumzenitalbogens fast stets auch das oberste Stück des großen Ringes erkennbar ist.

Bei den invariablen Halos, d. i. den Sonnenringen, beschränkt sich die theoretische Behandlung naturgemäß auf die Bestimmung der Radien. Bei den variablen sind zwei Wege möglich: Entweder berechnet man die zusammengehörigen Werte von Positionswinkel und Sonnenabstand, oder solche von Höhe und Azimut. Die früheren Bearbeiter der Halotheorie haben meist den ersteren Weg vorgezogen. Mir schien der zweite den Vorzug zu verdienen, der im folgenden überall benutzt wird. Schon die Rücksicht auf die Messungen, die doch vorzugsweise mit dem Theodoliten erhalten werden, läßt die Berechnung von Höhe und Azimut vorteilhafter erscheinen; dazu kommt aber die Leichtigkeit, mit der das Ergebnis dieser Berechnung sich in eine Kartenprojektion des Himmels eintragen läßt, was bei Positionswinkel und Sonnenabstand auf Schwierigkeiten stößt. Die von uns ein für allemal benutzte Projektion ist die äußere oder stereographische Zenitalprojektion, bei der das Himmelsgewölbe vom Nadirpunkt aus auf eine das Zenit tangierende Ebene projiziert wird. Der der Höhe h entsprechende Parallelkreis wird hierbei ein Kreis von Radius

$$r = R \operatorname{tg} \frac{90-h}{2}$$

wo R der gewählte Radius des den Horizont darstellenden Kreises ist.¹⁾

¹⁾ Wählt man $R=10$, so werden die Radien:

h	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°	(-10°	-20°	-30°	-40°	-50°)
r	0,00	0,88	1,76	2,68	3,64	4,66	5,77	7,00	8,39	10,00	(11,9	14,3	17,3	21,4	27,5)

In dieser Projektion lassen sich nicht nur alle zusammengehörigen Werte von Höhe und Azimut sofort eintragen, sondern es werden auch alle Kreise auf der Himmelskugel wieder als Kreise, wenn auch mit verschobenem Mittelpunkt, dargestellt, können also mit dem Zirkel gezeichnet werden; auch ist die Projektion winkeltreu, so daß die Winkel am Schnitt zweier Halos oder eines Halos mit einem Höhenparallel unverzerrt bleiben. Die graphischen Darstellungen beobachteter Halos sind fast stets in Anlehnung an diese Projektion gezeichnet worden, doch merkwürdigerweise niemals unter Benutzung des exakten Gradnetzes, worin die Quelle von zahlreichen Unsicherheiten zu suchen ist. Es wäre sehr zu wünschen, daß künftige Beobachter sich zur Darstellung des gesehenen eines solchen leicht zu entwerfenden Gradnetzes bedienen.

Es sei vorausgeschickt, daß der größere Teil der Erscheinungen bereits von früheren Autoren, z. T. seit langer Zeit, richtig erklärt worden ist. Des Zusammenhanges wegen konnten aber auch diese Teile in der Darstellung nicht übergangen werden.

2. Allgemeines über die Lichtbrechung in Eiskristallen.

Ist a der Einfallswinkel, b der Brechungswinkel des Lichtstrahls beim Eintritt in den Eiskristall, so ist der Brechungsquotient n definiert durch

$$\frac{\sin a}{\sin b} = n$$

Der Winkel b erreicht seinen größten Wert B , wenn $a = 90^\circ$ ist. Es ist also

$$\sin B = \frac{1}{n}$$

Wir können daher stets den Brechungsquotienten n ersetzen durch den Maximalwinkel B , was den Vorteil bietet, daß wir dessen verschiedene trigonometrische Funktionen verwenden können.

n und damit auch B sind von der Wellenlänge des Lichtes abhängig. Es ist nämlich für

	n	B
Mitte des Rot	1,307	$49,9^\circ$
„ „ Gelb	1,310	$49^\circ 45,7'$
„ „ Violett	1,317	$49,4^\circ$

Wenn man nicht die Farben einzeln zu berücksichtigen wünscht, pflegt man die Werte für die Mitte des Gelb zu benutzen.

Im einfachen 6seitigen Prisma, das im folgenden stets zugrunde gelegt wird, kommen nur 3 verschiedene Kantenwinkel vor, nämlich 90° , 120° und der Winkel von 60° , den jede Seitenfläche mit der übernächsten bildet. Von diesen 3 Winkeln scheidet jedoch derjenige von 120° für die Brechung vollständig aus, weil das Licht bei ihm unter allen Umständen Totalreflexion an der Austrittsfläche erleidet.

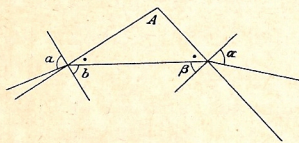


Fig. 1.

In Fig. 1 sei A der brechende Winkel, a und b Einfallswinkel und Brechungswinkel an der Eintrittsfläche, β und α an der Austrittsfläche. Der Strahlengang liege in der Normalebene des brechenden Winkels. Da b und β die beiden punktierten Winkel zu insgesamt 180° ergänzen, was A auch tut, muß sein

$$b + \beta = A$$

Die günstigsten Bedingungen für einen Wiederaustritt, d. i. kleinstes β , hat derjenige Strahl, für den b möglichst groß, also gleich B ist ($a = 90^\circ$). Es ist also

$$\beta \geq A - B$$

Da $B = 49,8^\circ$ ist, wird für einen brechenden Winkel $A = 120^\circ$

$$\beta \geq 70,2^\circ > B,$$

so daß Totalreflexion eintritt. Für $A = 90^\circ$ dagegen wird

$$\beta \geq 40,2^\circ < B,$$

so daß der Strahl noch passieren kann, und um so mehr natürlich für $A = 60^\circ$.

Die Dispersion, worunter wir den Unterschied der Endrichtungen für Mitte des Rot und Mitte des Violett im Minimum der Ablenkung verstehen wollen, hat beim brechenden Winkel von 60° den Betrag $44'$, beim brechenden Winkel von 90° dagegen $2^\circ 6'$. Die durch letzteren erzeugten Halos zeichnen sich daher durch ihre satten Farben aus.

3. Das System der Haupthalos.

Als naturgemäße Hauptgruppen ergeben sich die farbigen Brechungshalos und die weißen Spiegelhalos. Dazu käme noch die Gruppe solcher Halos, die auf kombinierter Spiegelung und Brechung beruhen. Da alle Spiegelungs- und Brechungsvorgänge aber mit Lichtverlusten verbunden sind, werden wir von dieser Gruppe nur die lichtstärksten zu den Haupthalos zählen dürfen. In der Tat sind aus ihr nur wenige relativ seltene und lichtschwache Halos bekannt, und zwar sind dies solche, bei denen der Strahlengang, abgesehen von der Spiegelung, gerade dem der häufigsten und lichtstärksten Brechungshalos entspricht. Theoretisch muß diese Gruppe sehr reichhaltig sein.

Bei den reinen Brechungshalos stehen uns zur weiteren Einteilung zwei Einteilungsgründe zur Verfügung: Die brechenden Winkel und die Orientierung der Hauptachse. Benutzen wir die brechenden Winkel, so teilen wir dadurch die Brechungshalos in zwei Familien, deren Verwandtschaft besonders bei der Ableitung der Theorie zutage tritt. Legen wir die Orientierung zugrunde, so fassen wir solche Halos zusammen, die besonders häufig gleichzeitig auftreten, und zwar erhalten wir eine Gliederung nach Linienhalos, Flächenhalos und Flächenhalos höherer Ordnung, je nachdem die Hauptachse vertikal steht, der Kristall also nur eine Bewegungsfreiheit, die Rotation um diese Achse, besitzt, oder horizontal (zwei Bewegungsfreiheiten), oder in idealer Unordnung (alle drei Bewegungsfreiheiten).

Die Theorie der reinen Spiegelhalos läßt sich heute noch nicht mit derselben Sicherheit verifizieren, wie die der Brechungshalos. Eine naturgemäße Teilung ergibt sich durch einmalige und zweimalige Spiegelung. Die einmalige Spiegelung ist im allgemeinen eine äußere, doch kann eine innere hinzutreten, wenn der Strahl die beim Eintritt in den Kristall entstehende Brechung beim Austritt wieder rückgängig macht. Im Falle der idealen Unordnung kann hier überhaupt keine eigentliche Haloerscheinung entstehen, so daß Spiegelhalos mit einmaliger Spiegelung nur bei vertikaler oder horizontaler Lage der Hauptachse möglich sind. Die doppelte Spiegelung ist stets eine innere. Auch hier muß beim Ein- und Austritt die Brechung gerade aufgehoben werden. Die Kantenwinkel des Kristalls wirken dann als Winkelspiegel von 60° , 90° und 120° .

Hieraus ergibt sich folgendes System der Haupthalos:

I. Brechungshalos.

A. Brechender Winkel von 60° .

1. Hauptachse vertikal: Nebensonnenhalo.
2. Hauptachse horizontal: Umschriebener Halo.¹⁾
3. Hauptachse in idealer Unordnung: Kleiner Ring von 22° Radius.

B. Brechender Winkel von 90° .

1. Hauptachse vertikal: Zirkumzenitalbogen.
2. Hauptachse horizontal: Seitlich untere Berührungsbogen des großen Ringes.
3. Hauptachse in idealer Unordnung: Großer Ring von 46° Radius.

¹⁾ Bei Sonnenhöhen unter $29,2^\circ$ der obere und untere Berührungsbogen des kleinen Ringes. Wir werden im folgenden diese Formen, die nur die Veränderungen ein und derselben Erscheinung darstellen, stets unter dem Namen »umschriebener Halo« zusammenfassen.

II. Spiegelhalos.

A. Einmalige Spiegelung.

1. Hauptachse vertikal:

- a) Spiegelung an den Seitenflächen: Horizontalring.
- b) Spiegelung an den Basisflächen: Untersonne.

2. Hauptachse horizontal:

- a) Spiegelung an den Seitenflächen: Lichtsäulenhalo.
- b) Spiegelung an den Basisflächen: Horizontalring.

B. Doppelte Spiegelung.

- α) Spiegelwinkel 60°
 - β) Spiegelwinkel 120°
 - γ) Spiegelwinkel 90° . Unterer Horizontalbogen, wahre Gegensonne.
- } Nebengegensonnen u. a.

III. Halos mit Brechung und Spiegelung.

- 1. Hauptachse vertikal: Untere Nebensonnen (gespiegelter Nebensonnenhalo).
- 2. Hauptachse horizontal: Gegenonnenhalo (gespiegelter umschriebener Halo).

Zu 2 (Hauptachse horizontal) würde die oben gekennzeichnete Gruppe von Nebensonnen gehören, bei denen auch die Nebenachsen eine orientierende Wirkung haben, so daß bei horizontaler Hauptachse auch eine der Nebenachsen horizontal liegt. In der Abteilung I A entspricht diesem Fall der seltene und lichtschwache Halo von Parry. Andere Vertreter dieser Gruppe sind nicht mit Sicherheit bekannt. Als Gruppe C der Brechungshalos wären die seltenen und lichtschwachen »abnormen Ringe« unterzubringen, die wahrscheinlich durch Pyramidenansätze an den Enden der Prismen entstehen.

4. Der Nebensonnenhalo.

Der Nebensonnenhalo ist normalerweise der lichtstärkste Halo überhaupt. Er entsteht bekanntlich in Eisprismen mit vertikaler Hauptachse durch solche Strahlen, die an einer der vertikalen Seitenflächen eintreten und an der übernächsten wieder austreten, also einen brechenden Winkel von 60° passieren.

Der Beobachter und die Eiswolke befinden sich im Mittelpunkt O der von außen betrachteten Himmelskugel (Fig. 2). Z ist das Zenit, also OZ die Richtung der Hauptachsen der Kristalle. S sei die Sonne.

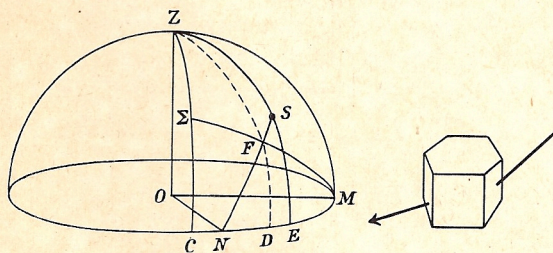


Fig. 2.

Wir greifen einen beliebigen Kristall heraus, der etwa die neben der Figur 2 gezeichnete Orientierung haben möge. ON sei das bis zur Sphäre verlängerte Lot auf der Einfallfläche. OM sei das nach innen errichtete und bis zur Sphäre verlängerte Lot auf der Austrittsfläche. M und N liegen im Horizont, weil alle Seitenflächen vertikal stehen. Der Bogen NM ist dann gleich dem brechenden Winkel A ($= 60^\circ$).

Die Eintrittsbrechung vollzieht sich in der Ebene NS so, daß der Strahl zum Lot gebrochen wird. Nach dieser Brechung schneide seine rückwärtige Verlängerung die Sphäre in F . Das Brechungsgesetz ergibt dann:

$$\frac{\sin NF}{\sin NS} = \sin B$$

Die Austrittsbrechung vollzieht sich in der neuen Ebene MF so, daß der Strahl vom Lot fort gebrochen wird. Nach dieser Brechung schneide seine rückwärtige Verlängerung die Sphäre in Σ . Das Brechungsgesetz ergibt:

$$\frac{\sin FM}{\sin \Sigma M} = \sin B$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{lll}
 h_s = SE & a = SN & a' = EN \\
 h_\sigma = \Sigma C & b = FN & b' = DN \\
 k = FD & \alpha = \Sigma M & \alpha' = CM \\
 \mu = FMD & \beta = FM & \beta' = DM \\
 \nu = FND & & \\
 \delta = EC & &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{lll} h_s = SE \\ h_\sigma = \Sigma C \\ k = FD \\ \mu = FMD \\ \nu = FND \\ \delta = EC \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Projektionen von} \\ a, b, \alpha, \beta \text{ auf} \\ \text{den Horizont.} \end{array}$$

Zunächst läßt sich zeigen, daß der Halopunkt Σ stets die gleiche Höhe haben muß wie die Sonne, so daß der ganze Nebensonnenhalo im Höhenparallel der Sonne liegen muß.

In den beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecken FDM und ΣCM mit dem gemeinsamen Winkel μ ergibt der Sinus-Satz:

$$\left[\frac{\sin \mu}{1} = \right] \frac{\sin k}{\sin \beta} = \frac{\sin h_\sigma}{\sin \alpha}$$

oder im Hinblick auf das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin k}{\sin h_\sigma} = \sin B \quad (1)$$

Ebenso erhalten wir aus den beiden Dreiecken FDN und SEN :

$$\left[\frac{\sin \nu}{1} = \right] \frac{\sin k}{\sin b} = \frac{\sin h_s}{\sin a}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\sin k}{\sin h_s} = \sin B \quad (2)$$

aus (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned}
 \sin h_\sigma &= \sin h_s \\
 h_\sigma &= h_s \quad (3)
 \end{aligned}$$

Der Nebensonnenhalo liegt also ganz im Höhenparallel der Sonne. Wir brauchen also nur noch seine Azimutgrenzen zu bestimmen.

Dazu müssen wir uns Rechenschaft darüber geben, wie sich das Brechungsgesetz bei der Projektion des Strahlenganges auf den Horizont ändert.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck gilt die allgemeine Gleichung $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$, wenn a die Hypotenuse ist. Wenden wir diese Formel auf die beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke NFD und NSE mit dem gemeinsamen Winkel ν an, so erhalten wir:

$$[\operatorname{tg} \nu =] \frac{\operatorname{tg} k}{\sin b'} = \frac{\operatorname{tg} h}{\sin a'} \quad (\text{den Index von } h \text{ können wir jetzt fortlassen}).$$

$$\text{Oder} \quad \sin a' = \frac{\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} k} \sin b'$$

Hierbei ist k und folglich auch $\frac{\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} k}$ nach (1) und (3) nur abhängig von der Sonnenhöhe, aber nicht von der Azimutdrehung des Kristalls. Wir setzen

$$\sin B' = \frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} h} \quad (4)$$

und erhalten damit das projizierte Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin b'}{\sin a'} = \sin B'$$

Auf gleiche Weise läßt sich ableiten:

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} = \sin B'$$

Der Verlauf der projizierten Strahlen ist also genau so, als stände die Sonne am Horizont und als hätte das Eis statt n einen Brechungsquotienten

$$n' = \frac{1}{\sin B'}$$

Zur Berechnung von B' können wir die Gleichung (4) noch bequemer gestalten, indem wir auf die Tangente übergehen:

$$\operatorname{ctg}^2 B' \left[= \frac{1}{\sin^2 B'} - 1 \right] = \operatorname{tg}^2 h \operatorname{ctg}^2 k - 1$$

Andererseits folgt aus $\sin k = \sin h \sin B$, daß

$$\operatorname{ctg}^2 k = \frac{1 - \sin^2 B \sin^2 h}{\sin^2 B \sin^2 h}, \text{ was eingesetzt ergibt:}$$

$$\operatorname{ctg}^2 B' = \frac{1 - \sin^2 B \sin^2 h - \sin^2 B \cos^2 h}{\sin^2 B \cos^2 h} = \frac{\cos^2 B}{\sin^2 B \cos^2 h}$$

$$\text{so daß wird: } \operatorname{tg} B' = \cos h \operatorname{tg} B \quad (5)$$

Nunmehr können wir an die Berechnung der Azimutgrenzen des Nebensonnenhalos herangehen. Hierzu denken wir uns den Kristall um seine vertikale Achse rotierend. Die Anfangsstellung, bei welcher der Strahl zum erstenmal die brechende Kante passieren kann, ist offenbar der streifende Einfall an der Eintrittsfläche. Diese Stellung liefert den sonnenfernsten Punkt des Nebensonnenhalos; sein Azimut¹⁾ sei δ_a . Drehen wir den Kristall in solche Richtung, daß der Einfallswinkel abnimmt, so rückt der Halopunkt auf dem Höhenparallel der Sonne dieser näher, bis das Minimum der Ablenkung (symmetrischer Strahlengang in der Projektion auf den Horizont) erreicht ist. Da in dieser Stellung eine kleine Drehung des Kristalls keine Ortsänderung des Halopunktes erzeugt, müssen besonders viele Kristalle Beiträge gerade zu diesem innersten Punkt, der eigentlichen Nebensonne, liefern. Ihr Azimut sei δ_i . Bei weiterer Drehung des Kristalls in gleicher Richtung rückt der Halopunkt wieder auf demselben Wege von der Sonne ab. Die letzte wirksame Stellung ist die, bei welcher Totalreflexion an der Austrittsfläche stattfindet, oder der Austritt streifend ist; sie ist identisch mit der Anfangsstellung.

Aus der Figur lassen sich leicht die beiden allgemein gültigen Beziehungen ablesen:

$$\delta + A = a' + \alpha' \quad \text{und} \quad A = b' + \beta'$$

Spezialisieren wir für die Nebensonne, so haben wir zu setzen

$$a' = \alpha' \quad \text{und} \quad b' = \beta'$$

so daß wird:

$$\delta_i + A = 2\alpha' \quad \text{und} \quad A = 2\beta'$$

Also wird

$$\sin \frac{\delta_i + A}{2} = \sin \alpha' \left[= \frac{\sin \beta'}{\sin B'} \right] = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B'} \quad (6)$$

Spezialisieren wir andererseits für die äußere Halogrenze, so haben wir zunächst $a = 90^\circ$ zu setzen. Da aber dann N der Pol des Großkreises ZSE wird, muß auch

$$a' = 90^\circ \quad \text{und also } b' = B' \text{ sein, so daß}$$

$$\delta_a + A = 90 + \alpha' \quad \text{und} \quad A = B' + \beta'$$

Also wird

$$\sin (\delta_a + A - 90) = \sin \alpha' \left[= \frac{\sin \beta'}{\sin B'} \right] = \frac{\sin (A - B')}{\sin B'} \quad (7)$$

Die Gleichungen der Nebensonnenhalos lauten daher:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_\sigma = h_s \\ \operatorname{tg} B' = \cos h \operatorname{tg} B \quad (\text{Hilfswinkel } B') \\ \sin \frac{\delta_i + A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B'} \quad (\text{Azimut } \delta_i \text{ der Nebensonnen}) \\ \sin (\delta_a + A - 90) = \frac{\sin (A - B')}{\sin B'} \quad (\text{Azimut } \delta_a \text{ des Halo-Endes}). \end{array} \right.$$

¹⁾ Die Azimute werden stets vom Sonnenvertikal gezählt.

Für $B = 49,8^\circ$ ergeben sich folgende Zahlenwerte für δ_i und δ_a . Für die Nebensonnen ist auch der Sonnenabstand A_i im größten Kreis (berechnet nach der Formel $\sin \frac{A_i}{2} = \cos h \sin \frac{\delta_i}{2}$) hinzugefügt, desgleichen die Differenz $\delta_a - \delta_i$ (Schweiflänge der Nebensonnen):

h_s	0	10	20	30	40	50	60	60,8°
δ_i	21,8	22,5	24,6	28,7	36,3	51,5	98,8	120,0
A_i	21,8	22,2	23,1	24,8	27,6	32,4	44,6	50,0
δ_a	43,4	44,1	46,2	50,3	57,2	69,8	104,9	120,0
$\delta_a - \delta_i$	21,6	21,6	21,6	21,6	20,9	18,3	6,1	0,0

Die Intensität des Nebensonnenhalos ist bei Horizontstand der Sonne am größten, weil der Strahlengang dann in die Normalebene des brechenden Winkels fällt. Die Nebensonnen fallen dann genau mit dem kleinen Ring zusammen. Bei höher steigender Sonne rücken sie immer mehr aus dem Ring heraus, werden aber immer schwächer, und die Schweiflänge nimmt ab.

Für $B' = \frac{A}{2}$ oder $\cos h = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} B$, d. i. für $h = 60,8^\circ$

werden die rechten Seiten der beiden Gleichungen für δ_i und δ_a gleich 1, ein Wert, den der Sinus nicht überschreiten kann. Bei dieser Sonnenhöhe erlischt also der Halo; es ist dann $\delta_i = \delta_a = 180 - A$. Die Schweiflänge ist hier Null.

Bei der Sonnenhöhe 43° liegen die Nebensonnen gerade im umschriebenen Halo, bei $60,1^\circ$ gerade im großen Ring.

Die Beobachtungen stehen mit diesen theoretischen Ergebnissen in bester Übereinstimmung. Die relative Häufigkeit der Nebensonnen bei verschiedenen Sonnenhöhen ist nach van Everdingen:¹⁾

h	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-60°
relat. Häufigkeit d. Nebensonnen	50	100	100	85	55	40	32	24	16	8	2	0

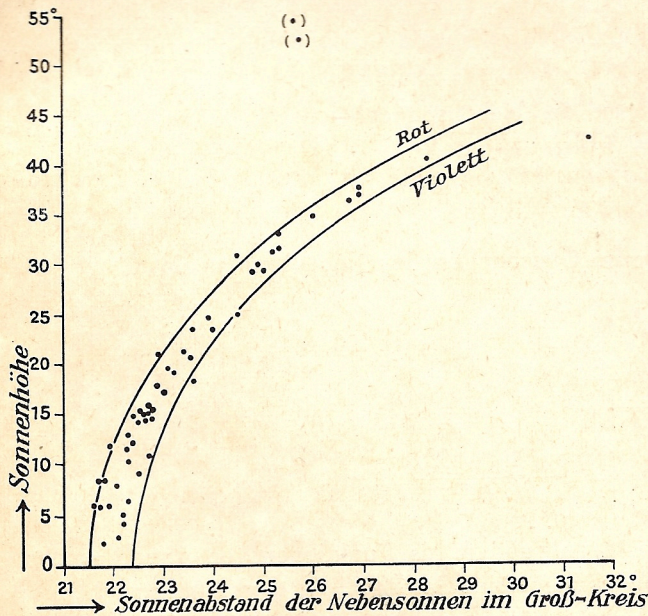


Fig. 3.

Gemessen wurde bisher meist der Sonnenabstand der Nebensonnen im Großkreis (A_i). In Fig. 3 sind alle Messungen eingetragen, die in der 2. Auflage von Pernter-Exners Meteorologischer Optik angeführt sind, vermehrt um zwei auf der Danmark-Expedition in Nordost-Grönland erhaltene. Die beiden Kurven geben die theoretischen Werte für Rot ($B = 49,9^\circ$) und Violett ($B = 49,4^\circ$).

Für das Schweifende (δ_a) liegen keine Beobachtungsangaben vor.

¹⁾ Nach Pernter-Exner. Ähnliche Häufigkeitswerte gibt auch R. Meyer, dessen Arbeit erst während der Korrektur berücksichtigt werden konnte.

5. Der umschriebene Halo.

Der bei niedrigen Sonnenständen noch geteilte umschriebene Halo entsteht bei horizontaler Hauptachse der Eiskristalle durch solche Strahlen, die an einer Seitenfläche eintreten und an der übernächsten wieder austreten. Sie passieren also den brechenden Winkel von 60° , und zwar liegt die brechende Kante stets horizontal.

Die schon von Bravais herrührende Theorie dieses Halos läßt sich aus der des Nebensonnenhalos in folgender Weise ableiten.

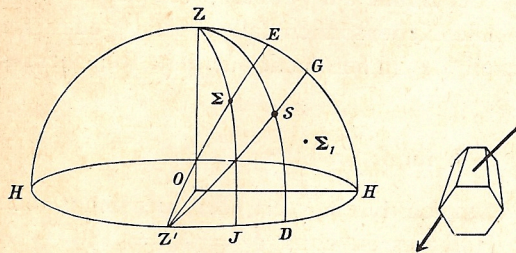


Fig. 4.

Der Beobachter und die Eiswolke befinden sich wieder im Mittelpunkt O der Himmelskugel. Die Hauptachsen aller Eiskristalle liegen horizontal. Wir greifen ein Eisprisma heraus, das die in Fig. 4 bezeichnete Orientierung haben möge, so daß seine Hauptachse nach Z' weist und die Normalebene des brechenden Winkels von 60° durch den Vertikal HZH repräsentiert wird, dessen Pol Z' ist. Die Großkreise $Z'\Sigma E$ und $Z'SG$ stehen dann auf HZH senkrecht. S ist die Sonne, Σ der Halopunkt, Z das Zenit.

Denken wir uns Z' als Zenit und HZH als Horizont, so stände die Hauptachse des betrachteten Kristalls vertikal, und durch eine Drehung um die Hauptachse würden zwei Nebensonnen mit von der Sonne fortgerichteten Schweifen erzeugt. Für ein bestimmtes Azimut der Hauptachsen können wir daher ohne weiteres die für den Nebensonnenhalo abgeleiteten Formeln benutzen.

Wir bezeichnen:

$$\begin{aligned} h_s &= SD \\ h_\sigma &= \Sigma \mathcal{F} \\ \delta &= D \mathcal{F} \\ \varphi &= D Z' \\ \eta &= Z G \end{aligned}$$

und in Anlehnung an die Bezeichnungen in der Theorie des Nebensonnenhalos:

$$\begin{aligned} h'_s &= SG \\ h'_\sigma &= \Sigma E \\ \delta' &= GE \end{aligned}$$

Mit diesen neuen Bezeichnungen schreiben sich die Gleichungen des Nebensonnenhalos:

$$\left\{ \begin{aligned} h'_\sigma &= h'_s \\ \operatorname{tg} B'' &= \cos h' \operatorname{tg} B \\ \sin \frac{\delta'_i + A}{2} &= \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B''} \\ \sin (\delta'_a + A - 90) &= \frac{\sin (A - B'')}{\sin B''} \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen sind so umzuformen, daß sie h_σ , δ_i und δ_a als Funktionen von h_s und φ geben. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ZGS ergibt der allgemeine Satz $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos \gamma$ (a Hypotenuse):

$$\operatorname{tg} \eta = \operatorname{ctg} h_s \sin \varphi \quad (1)$$

In demselben Dreieck ergibt der Satz der drei Kosinuse:

$$\cos h' = \frac{\sin h_s}{\cos \eta}$$

(Den Index von h' können wir fortlassen.) Hiermit schreibt sich die zweite der übernommenen Gleichungen:

$$\operatorname{tg} B'' = \frac{\sin h_s}{\cos \eta} \operatorname{tg} B \quad (2)$$

Nachdem durch (1) und (2) B'' bekannt ist, liefern uns die dritte und vierte der übernommenen Gleichungen, die nicht verändert zu werden brauchen, die Hilfswinkel δ'_i und δ'_a :

$$\sin \frac{\delta'_i + A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B''} \quad (3)$$

$$\sin (\delta'_a + A - 90) = \frac{\sin (A - B'')}{\sin B''} \quad (4)$$

Wenden wir weiter auch auf das rechtwinklige Dreieck $Z\Sigma E$ den Satz der drei Kosinuse an, so erhalten wir:

$$\sin h_\sigma = \cos (\eta \mp \delta') \cos h' = \cos (\eta \mp \delta') \frac{\sin h_s}{\cos \eta} \quad (5)$$

wobei das negative Vorzeichen für den oberen (Punkt Σ), das positive für den unteren Teil des umschriebenen Halos (Punkt Σ_1) gilt.

Wenn wir endlich auf dasselbe Dreieck $Z\Sigma E$ auch noch den Sinus-Satz anwenden, so erhalten wir, da $H\mathcal{F} = 90 - (\varphi \mp \delta)$ ist:

$$\cos (\varphi \mp \delta) = \frac{\sin h'}{\cos h_\sigma}$$

oder, da $\sin h'$ aus dem Dreieck ZSG nach dem Sinus-Satz zu $\cos \varphi \cos h_s$ entnommen werden kann:

$$\cos (\varphi \mp \delta) = \frac{\cos \varphi \cos h_s}{\cos h_\sigma} \quad (6)$$

wobei wieder das obere Vorzeichen für den oberen, das untere für den unteren Teil des umschriebenen Halos gilt.

Gleichung (5) und damit auch Gleichung (6) enthält δ' ohne Spezialisierung. Je nachdem wir dafür den Wert δ'_i oder δ'_a einführen, erhalten wir Höhenwinkel h_σ und Azimut δ des innersten oder des äußersten Halopunktes. Da wir zur vollständigen Konstruktion des Flächenhalos beide benötigen, sind im ganzen für den umschriebenen Halo 8 Gleichungen durchzurechnen, und zwar für äquidistante, etwa von 10 zu 10 Grad wachsende Azimute φ der Hauptachsen. Wir stellen diese Gleichungen nochmals zusammen, wobei wir die konstanten Faktoren von denjenigen trennen, die von φ abhängig sind:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \eta &= [\operatorname{ctg} h_s] \sin \varphi \\ \operatorname{tg} B'' &= [\sin h_s \operatorname{tg} B] \frac{1}{\cos \eta} \end{aligned} \right\} \text{Hilfswinkel } \eta, B''$$

$$\text{Brennlinie} \left\{ \begin{aligned} \sin \frac{\delta'_i + A}{2} &= \left[\sin \frac{A}{2} \right] \frac{1}{\sin B''} \text{Hilfswinkel } \delta'_i \\ \sin h_{\sigma, i} &= [\sin h_s] \frac{\cos (\eta \mp \delta'_i)}{\cos \eta} \\ \cos (\varphi \mp \delta_i) &= [\cos h_s] \frac{\cos \varphi}{\cos h_{\sigma, i}} \end{aligned} \right\} h_{\sigma, i} \text{ und } \delta_i$$

$$\text{äußere Grenze} \left\{ \begin{aligned} \sin (\delta'_a + A - 90) &= \frac{\sin (A - B'')}{\sin B''} \text{Hilfswinkel } \delta'_a \\ \sin h_{\sigma, a} &= [\sin h_s] \frac{\cos (\eta \mp \delta'_a)}{\cos \eta} \\ \cos (\varphi \mp \delta_a) &= [\cos h_s] \frac{\cos \varphi}{\cos h_{\sigma, a}} \end{aligned} \right\} h_{\sigma, a} \text{ und } \delta_a$$

Für den Spezialfall $h_s = 0$ wird offenbar $Z'S = Z'D$, also $90 - h' = \varphi$, so daß die zweite der übernommenen Gleichungen geschrieben werden kann

$$\operatorname{tg} B'' = \operatorname{tg} B \sin \varphi$$

Außerdem wird dann $\eta = 90^\circ$, so daß eine Gleichung gespart wird.

Die dritte Gleichung unseres Systems zeigt, daß wir für δ'_i keine Werte mehr erhalten, wenn $B'' < \frac{A}{2}$ wird. Darin kommt zum Ausdruck, daß nicht alle Kristallrichtungen φ Beiträge zum Halo liefern können, weil bei bestimmten Richtungen Totalreflexion eintritt. Wir können die Grenze der wirksamen Winkel φ dadurch bestimmen, daß wir in die zweite Gleichung den Grenzwert $B'' = \frac{A}{2}$ einführen:

$$\cos \eta_0 = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} \sin h_s$$

und mit diesem Wert η_0 das zugehörige φ_0 nach der ersten Gleichung berechnen:

$$\sin \varphi_0 = \operatorname{tg} \eta_0 \operatorname{tg} h_s$$

Da eine ungefähre Kenntnis dieses Grenzwertes meist genügen wird, sei derselbe für einige Sonnenhöhen hier gegeben:

h_s	0	2	5	10	15	20	25	29,2°
η_0	90,0	85,9	79,7	69,2	58,0	45,6	30,2	0,0
φ_0	29,2	29,2	28,9	27,6	25,4	21,8	15,7	0,0

Da $\frac{A}{2}$ der kleinste Wert von B'' ist, also $\cos \eta_0$ der größte Wert von $\cos \eta$, η_0 der kleinste von η , so ist auch φ_0 der kleinste Wert von φ . Nur zwischen $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = 90^\circ$ werden also Beiträge zum Halo geliefert. Wie man sieht, fällt bei Horizontstand der Sonne fast $\frac{1}{3}$ aller Eiskristalle aus. Bei der Sonnenhöhe 29,2° dagegen fällt diese Beschränkung fort, der Halo muß also von hier ab stärker leuchten. Zugleich ist dies die Höhe, bei welcher sich der obere und untere Teil des umschriebenen Halo zusammenschließen. Bei Zenitstand der Sonne fällt der umschriebene Halo ganz mit dem kleinen Ring zusammen.

Zahlenwerte. Will man für eine gegebene Sonnenhöhe h_s den umschriebenen Halo berechnen, so wählt man φ in äquidistanten Intervallen von 10 zu 10 Grad unter Ausschluß der noch nicht wirksamen Werte, und rechnet für jeden dieser Werte φ das Gleichungssystem durch.

Für die Sonnenhöhe $h_s = 20^\circ$ ist das Ergebnis der Rechnung in folgender Tabelle zusammengestellt:

φ	21,8	30	40	50	60	70	80	90°	
Oberer Berührungsbogen	$h_{\sigma,i}$	7,5	34,9	41,7	43,2	43,0	42,4	42,0	41,8
	δ_i	50,1	37,2	24,6	15,9	10,0	5,8	2,7	0,0
	$h_{\sigma,a}$	7,5	31,6	43,9	51,7	57,1	60,6	62,8	63,6
	δ_a	50,1	46,8	43,8	36,6	29,8	20,9	10,9	0,0
Unterer Berührungsbogen	$h_{\sigma,i}$	-28,2	-15,8	-9,8	-6,5	-4,4	-3,0	-2,2	-1,8
	δ_i	-14,3	+2,2	+3,3	+2,7	+1,9	+1,2	+0,6	0,0
	$h_{\sigma,a}$	-28,2	-23,5	-22,9	-23,0	-23,2	-23,3	-23,4	-23,4
	δ_a	-14,3	-2,8	-1,2	-1,0	-0,8	-0,5	-0,2	0,0

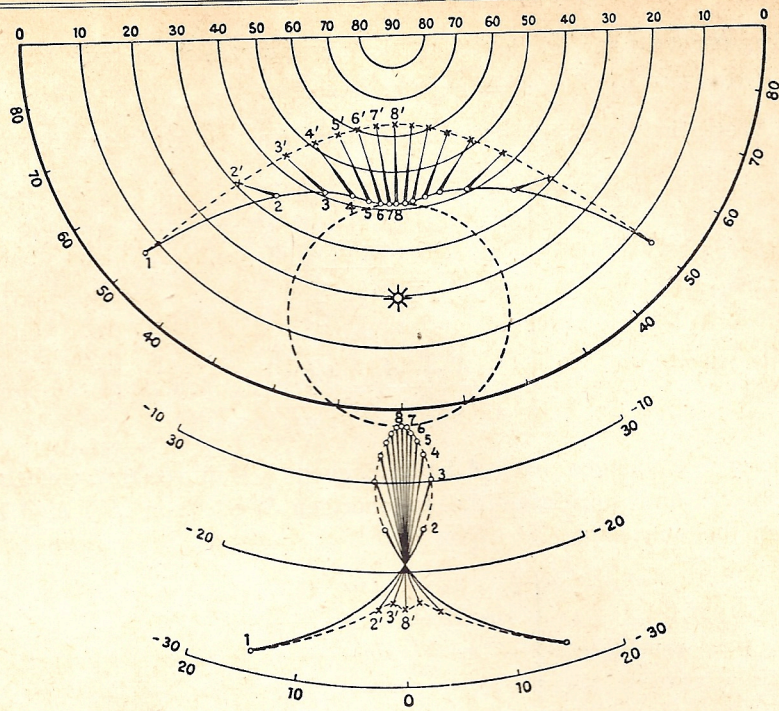


Fig. 5.

Dies Ergebnis ist in Fig. 5 in äußerer oder stereographischer Zenitalprojektion veranschaulicht. Zur Ergänzung des Bildes ist auch der kleine Ring mitgezeichnet. Die Punkte 1—8 stellen die Werte der Brennlinie für $\varphi = 21,8$ bis $\varphi = 90^\circ$ dar, die Punkte 1'—8' die entsprechenden des Außenrandes.

Als zweites Beispiel gibt die folgende Tabelle die Werte für die Sonnenhöhe $h_s = 45^\circ$. In diesem Fall ist der umschriebene Halo geschlossen:

	C	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°
Oberer Teil	$h_{\sigma,n}$	31,5	37,8	44,9	51,6	57,1	61,2	64,0	65,6	66,5	66,8
	δ_i	34,0	38,2	40,1	39,4	36,3	30,7	23,6	15,8	7,9	0,0
	$h_{\sigma,a}$	19,1	26,5	35,1	44,0	52,6	60,9	68,6	75,9	82,9	88,3
	δ_a	40,0	48,9	55,7	61,7	66,9	70,9	74,0	76,8	73,5	0,0
Unterer Teil	$h_{\sigma,i}$	31,5	26,8	24,1	22,8	22,4	22,4	22,7	23,0	23,1	23,2
	δ_i	-34,0	-28,7	-23,3	-18,4	-14,1	-10,6	-7,5	-4,8	-2,3	0,0
	$h_{\sigma,a}$	19,1	13,4	9,3	6,5	4,6	3,3	2,5	1,9	1,7	1,6
	δ_a	-40,0	-34,3	-27,7	-22,0	-17,1	-12,9	-9,3	-6,0	-2,9	0,0

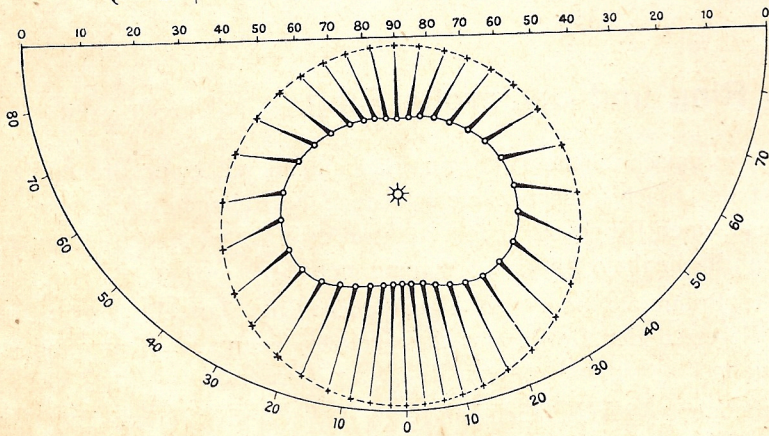


Fig. 6.

Diese Ergebnisse sind in Fig. 6 graphisch dargestellt.

Zur Messung eignet sich besonders gut der Schnittpunkt der Brennlinie mit dem Horizontal-Kreis, d. h. derjenige Punkt der Brennlinie, welcher gleiche Höhe mit der Sonne hat. Es kommen hierbei die ersten fünf Gleichungen unseres Systems in Betracht, in denen wir noch die Beziehung

$$h_\sigma = h_s$$

einzuführen haben. Aus der vierten und fünften Gleichung ergibt sich hieraus

$$\delta' = 2 \eta \text{ und } \delta = 2 \varphi$$

Setzen wir diese Werte in die ersten drei Gleichungen ein, so erhalten wir

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} = \operatorname{ctg} h \sin \frac{\delta}{2} \\ \operatorname{tg} B'' = \frac{\sin h \operatorname{tg} B}{\cos \frac{\delta'}{2}} \\ \sin \frac{\delta' + A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B''} \end{array} \right.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach δ ist unbequem. Man verfährt einfacher so, daß man für δ' numerische Werte einsetzt und sukzessive die zugehörigen Werte von B'' , h , δ berechnet, d. h. die Gleichungen in der Form benutzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin B'' = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{\delta' + A}{2}} \\ \sin h = \frac{\operatorname{tg} B'' \cos \frac{\delta'}{2}}{\operatorname{tg} B} \\ \sin \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\delta'}{2} \operatorname{tg} h \end{array} \right.$$

Die Grenzen, zwischen denen man δ' zu variieren hat, sind nach der Zahlentabelle auf S. 9 offenbar $21,8^\circ$ und 120° . Im ersteren Falle ist $h' = 0$, also liegt S auf dem Bogen ZGH , und Σ symmetrisch zu ihm jenseits Z . Dann wird $h = 90 - 10,9 = 79,1^\circ$ und $\delta = 180^\circ$. Man findet auf diese Weise folgende zusammengehörigen Werte für Sonnenhöhe und Azimut des im Horizontal-Kreis liegenden Halopunktes:

δ'	21,8	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120 ⁰
h	79,1	65,4	54,8	43,2	36,3	31,3	27,3	24,0	21,2	18,7	16,4	14,1
δ	180	57,9	44,7	40,0	40,1	41,1	42,4	44,0	45,7	47,6	49,6	51,7

Mit Hilfe dieser Zahlen kann man durch graphische Interpolation bequem für jede Sonnenhöhe das zugehörige Azimut des Schnittpunktes der Brennlinie mit dem Horizontal-Kreis finden.

Brauchbare Messungen, die eine Prüfung der Theorie gestatten, scheinen jedoch bisher nicht vorzuliegen.

6. Der kleine Ring und der große Ring.

Auch der kleine Ring ist ebenso wie der umschriebene Halo ein Flächenhalo mit einer Brennlinie; doch während bei letzterem für jeden Punkt der Fläche nur zwei verschiedene Kristallagen als Erzeuger in Frage kommen, tragen bei der Fläche des kleinen Ringes für jeden Punkt unendlich viele Orientierungen bei. Wir können deshalb diesen Halo einen Flächenhalo höherer Ordnung nennen.

Der Innenrand der Fläche, welche die Brennlinie oder den eigentlichen Ring darstellt, entspricht dem Minimum der Ablenkung. Nach den Gesetzen der Optik wird dies erreicht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind. Es muß nämlich der Strahlengang

1. völlig in die Normalebene des brechenden Winkels fallen, und
2. symmetrisch zu diesem verlaufen.

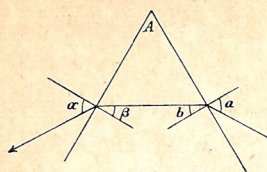


Fig. 7

Wie Fig. 7 zeigt, haben wir also für die Berechnung der Brennlinie $a = \alpha$ und $b = \beta = \frac{A}{2}$, so daß sich das Brechungsgesetz schreibt

$$\sin a = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B}$$

Da die ganze Ablenkung des Strahls

$$A_i = a - b + \alpha - \beta = 2a - A \text{ ist, wird}$$

$$\sin \frac{A_i + A}{2} [= \sin a] = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B} \quad (1)$$

Um auch den äußeren Radius A_a zu finden, berücksichtigen wir, daß wir jeden Halopunkt auch als Punkt eines Nebensonnenhalos auffassen können. Für A_a muß also nach den Ausführungen auf S. 9 gelten:

$$\sin \frac{A_a}{2} = \cos h' \sin \frac{\delta'}{2}$$

wobei $\delta' = 180 - A$ und $\cos h' = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} B$ ist, so daß wird

$$\sin \frac{A_a}{2} = \operatorname{ctg} B \sin \frac{A}{2} \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten in gleicher Weise für den kleinen und den großen Ring, je nachdem man für A den Wert 60° oder 90° einsetzt. Dies ist der Grund, weshalb wir den großen Ring gleich an dieser Stelle mit behandeln.

Man erhält folgende Zahlenwerte:

B	A_i			A_a
	$49,9^\circ$	$49,8^\circ$	$49,4^\circ$	$49,8^\circ$
kleiner Ring	21,6	21,8	22,4	50,0
großer Ring	45,2	45,5	47,3	73,5

Messungen sind aus naheliegenden Gründen nur für die Brennlinien angestellt. Sie stimmen, wenn man die Dispersion berücksichtigt, gut mit der Theorie. Es fanden z. B.:

Für den kleinen Ring:		Für den großen Ring:	
Kämtz (8 Mess.)	21,8	Hevel	45,0
Galle (16 Mess.)	21,7	Scheiner	47,7
Ekama (16 Mess.)	22,0	De Fouchy	46,5
Omond (16 Mess.)	22,1	Mallet	44,5
Mittel	21,9 ⁰	Brandes	45,3
		Peytier	45,4
		Lambert	45,5
		Bravais	45,7
		Ekama	46,3
		Mittel	45,8 ⁰

Beim großen Ring verleitet der noch zu besprechende Zirkumzenitalbogen leicht zu fehlerhaften Messungen des Radius, weil manche Beobachter in der Annahme, daß er ein echter Berührungsbogen sei, seinen Sonnenabstand als Ringradius genommen haben. Es dürfte sich empfehlen, künftig lieber das Azimut der Durchschnittspunkte des großen Ringes mit dem Horizontal-Kreis zu messen und daraus den Ringradius zu berechnen. Beim kleinen Ring ist dagegen die übliche Messung im Sonnenvertikal vorzuziehen, weil hier im Horizontal-Kreis die Nebensonnen zu ähnlichen Täuschungen Anlaß geben könnten.

7. Der Zirkumzenitalbogen.

Der Zirkumzenitalbogen ist der häufigste und hellste derjenigen Halos, die durch den brechenden Winkel von 90° erzeugt werden, und wird deshalb mit Recht als die farbenprächtigste unter allen Haloserscheinungen gerühmt. Seine richtige Erklärung wurde schon von Bravais gegeben; er entsteht bei

vertikaler Hauptachse der Kristalle durch solche Strahlen, welche die obere Basisfläche treffen und an einer Seitenfläche wieder austreten. Er ist demgemäß ein Linienhalo.

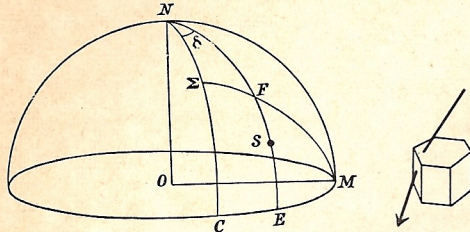


Fig. 8.

Wieder mögen sich Beobachter und Eiswolke im Mittelpunkt O der von außen betrachteten Himmelskugel Fig. 8 befinden. Alle Hauptachsen haben diesmal die Richtung ON nach dem Zenit. S sei die Sonne. Wir greifen einen Kristall heraus, der die in der Figur skizzierte Lage haben möge. OM sei das nach innen gerichtete und bis zur Sphäre verlängerte Lot auf der Austrittsfläche.

Beim Eintritt wird der Strahl in der Ebene NS , und zwar zum Lot, gebrochen. Seine rückwärtige Verlängerung nach dieser Brechung schneide die Sphäre in F , so daß

$$\sin B = \frac{\sin NF}{\sin NS}$$

Beim Austritt wird er in der neuen Ebene FM gebrochen, und zwar vom Lot fort; seine rückwärtige Verlängerung nach dem Austritt schneide die Sphäre in dem Halopunkt Σ , so daß

$$\sin B = \frac{\sin FM}{\sin \Sigma M}$$

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{llll} h_s = SE & \delta = CE & a = NS & \alpha = \Sigma M \\ h_\sigma = \Sigma C & \mu = FME & b = NF & \beta = FM \end{array}$$

Zunächst wollen wir die Höhe des Halopunktes berechnen. In den beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ΣCM und FEM mit dem gemeinsamen Winkel μ ergibt der Sinus-Satz:

$$[\sin \mu =] \frac{\sin h_\sigma}{\sin \alpha} = \frac{\sin (90 - b)}{\sin \beta}$$

$$\text{oder da} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin B} \quad \text{ist:}$$

$$\sin h_\sigma = \frac{\cos b}{\sin B} \quad (1)$$

Hierin ist noch b unbekannt. Da $a = 90 - h_s$, schreibt sich das Brechungsgesetz

$$\sin b = \sin B \cos h_s \quad (2)$$

Man kann mit Hilfe von (2) b aus (1) eliminieren, doch rechnet man numerisch leichter b als Hilfswinkel aus (2) und dann h_σ aus (1).

Wie diese Gleichungen zeigen, ist die Höhe des Halopunktes unabhängig vom Azimut. Es müssen also alle Halopunkte dieselbe Höhe haben, d. h. der Zirkumzenitalbogen liegt ganz in einem Höhenparallel.

Um die Azimutgrenzen zu finden, denken wir uns den Kristall um seine vertikale Achse gedreht. Das Ende des Halos wird erreicht, wenn an der Austrittsfläche Totalreflexion eintritt, also $\beta = B$ und folglich $\alpha = 90^\circ$ wird. Dann wird M der Pol des Großkreises $N\Sigma C$, also das Dreieck $N\Sigma F$ bei Σ rechtwinklig. Der Sinussatz ergibt dann in ihm:

$$\frac{\sin \delta}{\cos B} = \frac{1}{\sin b}$$

oder wenn wir $\sin b$ nach dem Brechungsgesetz ersetzen durch $\sin B \cos h_s$:

$$\sin \delta = \frac{\text{ctg } B}{\cos h_s} \quad (3)$$

Die Gleichungen des Zirkumzenitalbogens lauten also

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin b = \sin B \cos h_s \quad (\text{Hilfswinkel } b) \\ \sin h_\sigma = \frac{\cos b}{\sin B} \\ \sin \delta = \frac{\text{ctg } B}{\cos h_s} \end{array} \right.$$

Für $B = 49,8^\circ$ ergeben sich hiernach folgende Zahlenwerte für die Höhe h_σ und den Azimutbereich δ des Zirkumzenitalbogens. Beigefügt sind die Werte für den Sonnenabstand im Sonnenvertikal $A = h_\sigma - h_s$:

h_s	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32,3°
h_σ	57,7	57,8	58,0	58,4	59,0	59,8	60,6	61,6	62,9	64,3	65,9	67,7	69,9	72,4	75,4	79,4	90
A	57,7	55,8	54,0	52,4	51,0	49,8	48,6	47,6	46,9	46,3	45,9	45,7	45,9	46,4	47,4	49,4	57,7
δ	57,7	57,7	57,9	58,2	58,5	59,2	59,8	60,6	61,5	62,8	64,1	65,8	67,6	69,9	73,2	77,2	90

Der Zirkumzenitalbogen tritt also auf zwischen den Sonnenhöhen 0° (wo der Strahl noch streifend auf die obere Basisfläche der Kristalle fällt) und $32,3^\circ$, wo Totalreflexion an der Austrittsfläche eintritt und der Halo auf den Zenitpunkt zusammenschrumpft. Die größte Lichtstärke (stets im Sonnenvertikal) wird erreicht bei der Sonnenhöhe $22,1^\circ$, bei welcher der Strahlengang symmetrisch zur brechenden

Kante verläuft, d. h. $b = \beta = \frac{A}{2}$ und also nach dem Brechungsgesetz $\cos h_s = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B}$ ist. Bei dieser Sonnenhöhe liegt der Schnittpunkt des Halos mit dem Sonnenvertikal genau im großen Ring, sonst stets oberhalb desselben.

Die Beobachtungen haben diese Theorie vollauf bestätigt. Die relative Häufigkeit dieses Halos bei verschiedenen Sonnenhöhen ist nach van Everdingen:¹⁾

Sonnenhöhe	< 0	0—4	5—9	10—14	15—19	20—24	25—29	30—34	35—39°
rel. Häufigkeit d. Zirkumzenitalbogens	0	1	10	33	96	100	37	4	0

Die Grenzen stimmen also mit den theoretischen überein, und das Häufigkeitsmaximum liegt in derjenigen Höhe, in welcher nach der Theorie die Lichtstärke am größten sein muß.

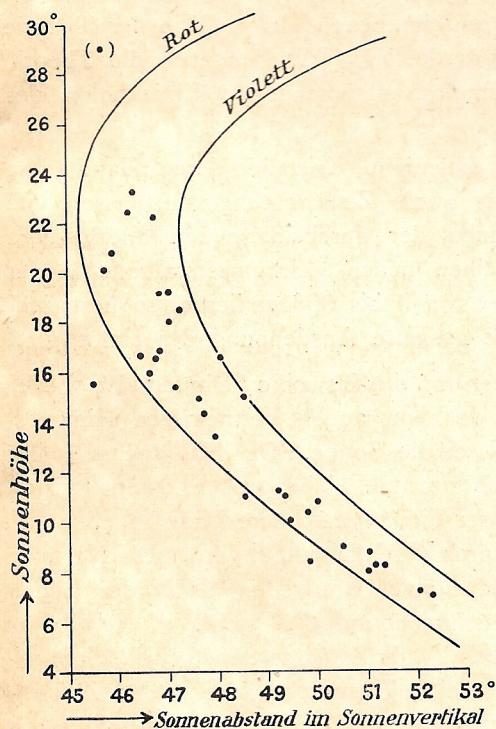


Fig. 9.

Gemessen wurde bisher nur der Sonnenabstand im Sonnenvertikal. Die hierauf bezüglichen Beobachtungen, die in der zweiten Auflage von Pernter-Exners Meteorologischer Optik mitgeteilt sind, vermehrt um eine eigene Beobachtung aus Grönland, habe ich in Fig. 9 graphisch dargestellt. Die beiden Kurven geben die theoretischen Werte für Rot und Violett. Mit Ausnahme von zwei Beobachtungen, von denen die eingeklammerte sich auf einen Mondhalo bezieht und daher wohl weniger sicher ist, stimmen alle gut mit der Theorie. Sie widerlegen insbesondere die auch von Pernter angenommene Galesche Theorie, nach welcher dieser Halo ein echter Berührungsbogen mit konstantem Sonnenabstand im Sonnenvertikal sein sollte, und beweisen die Richtigkeit der Bravais'schen Theorie. Für die von Exner vertretene Auffassung, daß beide Arten vorkommen, liegt ein überzeugender Beweis wohl noch nicht vor. In jedem Falle müßte aber der Galesche echte Berührungsbogen sehr selten sein.

Ein ähnlicher Horizontalhalo unterhalb des großen Ringes, von manchen Zirkumhorizontalbogen genannt, muß durch solche Strahlen entstehen, die zuerst an einer Seitenfläche des Kristalls eintreten und an der unteren Basisfläche austreten.

¹⁾ Siehe Pernter-Exner. Praktisch dasselbe Ergebnis erhält R. Meyer.

Die Gleichungen dieses Halos, die ganz analog abgeleitet werden, lauten:

$$\begin{cases} \cos \beta = \sin B \sin h_s & (\text{Hilfswinkel } \beta) \\ \cos h_o = \frac{\sin \beta}{\sin B} \\ \text{ctg } \delta = \text{tg } B \cos h_s \end{cases}$$

Die Diskussion dieser Gleichungen zeigt, daß der Halo auf Sonnenhöhen über $57,7^\circ$ beschränkt ist, da sonst Totalreflexion an der unteren Basisfläche eintritt. Andererseits wird bei Zenitstand der Sonne der Einfall an den Seitenflächen streifend. Die größte Intensität erreicht dieser Halo bei der Sonnenhöhe $67,6^\circ$, wo sein Schnittpunkt mit dem Sonnenvertikal genau im großen Ring liegt.

Große Sonnenhöhen sind an sich nicht günstig für Halobeobachtungen. Im vorliegenden Falle kommt dazu noch die besondere Schwierigkeit, daß der Eintritt an den Seitenflächen erfolgen soll. Vertikale Prismen tragen meist an ihrer oberen Basis größere, als Fallschirm wirkende Plättchen, die bei hohem Sonnenstande die Seitenflächen beschatten. Dies dürfte der Grund dafür sein, daß sichere Beobachtungen dieses Halos bisher anscheinend nicht erhalten worden sind.¹⁾ In vielen Fällen wird dieser Halo außerdem mit den seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes mehr oder weniger zusammenfallen.

8. Die seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes.

Die Theorie dieses Halos ist in der zweiten Auflage von Pernter-Exners Meteorologischer Optik zwar angedeutet, aber nicht ausgeführt. Die von Hastings entwickelte Theorie, die auch den Ausgangspunkt von Exners Überlegung bildet, dürfte unzureichend sein. Die folgende Darstellung lehnt sich am meisten an Bravais an.

Der Halo entsteht bei horizontaler Hauptachse der Kristalle durch solche Strahlen, welche an einer der vertikalen Basisflächen eintreten und an einer Seitenfläche wieder austreten, also einen brechenden Winkel von 90° passieren. Er ist ein Flächenhalo ähnlich dem umschriebenen Halo. Wie der Theorie des letzteren der entsprechende Linienhalo (Nebensonnenhalo) zugrunde liegt, läßt sich auch die Theorie der seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes aus der des entsprechenden Linienhalos, des Zirkumzenitalbogens, ableiten.

Beschränken wir nämlich zunächst die Betrachtung auf alle diejenigen Kristalle, deren Hauptachse das gleiche Azimut φ besitzt, so brauchen wir nur diese Richtung φ als Zenitrichtung aufzufassen, um sofort den zugehörigen »Zirkumzenitalbogen« konstruieren zu können, der durch diese Kristalle erzeugt wird. Wählen wir dann ein anderes Azimut φ , so erhalten wir einen neuen »Zirkumzenitalbogen«, der gegen den früheren verschoben ist, und lassen wir schließlich φ von 0 bis 90° variieren, so bestreicht der Zirkumzenitalbogen eine Fläche am Himmel, welche uns die gesamte Ausdehnung des Halos gibt.

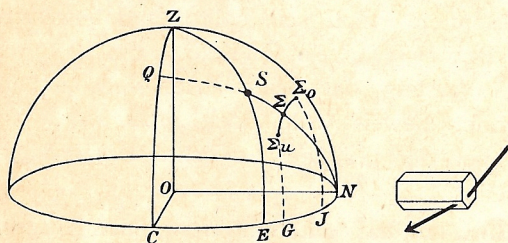


Fig. 10.

Der Beobachter und die Eiswolke befinden sich wieder im Mittelpunkt O der von außen betrachteten Himmelskugel (Fig. 10). S sei die Sonne. Die Hauptachsen aller Eiskristalle liegen horizontal. Wir greifen einen Kristall heraus, der die in der Figur gezeichnete Lage habe, so daß seine Hauptachse durch ON dargestellt wird. Die Normale auf der Austrittsfläche muß dann jedenfalls in der Ebene ZQC liegen, die senkrecht auf ON steht. Denken wir uns N als Zenit, so daß SQ die Sonnenhöhe wäre, so würde der betrachtete Kristall, wenn er sich um seine Hauptachse dreht, den Zirkumzenitalbogen Σ_o, Σ_u erzeugen, wobei Σ_o und Σ_u die beiden äußersten Grenzen und Σ den sonnennächsten Punkt bezeichnen. Die Abstände dieser drei Punkte von N sind gleich groß.

¹⁾ Inzwischen hat Visser in Met. Zeitschr. 1925, S. 180, einige Beobachtungen dieses Halos aus Java veröffentlicht.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{lll} SE = h_s & NE = \varphi & SNE = \nu \\ \Sigma_o \mathcal{F} = h_{\sigma,o} & N\mathcal{F} = \delta_o & \\ \Sigma_u G = h_{\sigma,u} & NG = \delta_u & \end{array}$$

Ferner übernehmen wir alle Bezeichnungen aus der Theorie des Zirkumzenitalbogens, machen sie aber durch Strichelung kenntlich, z. B. $SQ = h'_s$ usw.

Zwischen h_s und h'_s besteht dann nach dem Satz der drei Kosinuse im rechtwinkligen sphärischen Dreieck SEN die Beziehung

$$\sin h'_s = \cos h_s \cos \varphi \quad (1)$$

Wir können nun die drei Gleichungen des Zirkumzenitalbogens ohne weiteres übernehmen. Sie lauten in unserer jetzigen Bezeichnung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin b' = \sin B \cos h'_s \quad (2) \\ \sin h'_\sigma = \frac{\cos b'}{\sin B} \quad (3) \\ \sin \delta' = \frac{\text{ctg } B}{\cos h'_s} \quad (4) \end{array} \right.$$

Um hieraus $h_{\sigma,o}$, $h_{\sigma,u}$ und δ_o , δ_u zu erhalten, müssen wir zunächst noch den Hilfswinkel ν nach dem Sinussatz im Dreieck SEN ermitteln:

$$\sin \nu = \frac{\sin h_s}{\cos h'_s} \quad (5)$$

Projizieren wir nun Σ_o und Σ_u auf den Horizont (Punkt \mathcal{F} und G), so erhalten wir zwei rechtwinklige Dreiecke mit den gleichen Hypothenusen $\Sigma_o N = \Sigma_u N = 90 - h'_\sigma$ und den Winkeln bei N : $\nu + \delta'$ bzw. $\nu - \delta'$. Der Sinus-Satz ergibt:

$$\sin h_\sigma = \sin(\nu \pm \delta') \cos h'_\sigma \quad (6)$$

wobei das obere Vorzeichen für den oberen, das untere für den unteren Haloanfang gilt. Und der Satz der drei Kosinuse liefert:

$$\cos(\varphi - \delta) = \frac{\sin h'_\sigma}{\cos h_\sigma} \quad (7)$$

Damit haben wir folgendes System als Gleichungen der seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes, wobei die von φ unabhängigen Faktoren herausgehoben sind:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin h'_s = [\cos h_s] \cos \varphi \\ \sin b' = [\sin B] \cos h'_s \\ \sin h'_\sigma = \left[\frac{1}{\sin B} \right] \cos b' \\ \sin \delta' = [\text{ctg } B] \frac{1}{\cos h'_s} \\ \sin \nu = [\sin h_s] \frac{1}{\cos h'_s} \\ \sin h_\sigma = \sin(\nu \pm \delta') \cos h'_\sigma \\ \cos(\varphi - \delta) = \frac{\sin h'_\sigma}{\cos h_\sigma} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Hilfswinkel } h'_s, b', h'_\sigma, \delta', \nu \\ h_\sigma, \delta \end{array} \right.$$

Aus diesem System ließen sich zwar unschwer wenigstens zwei Hilfswinkel eliminieren, doch gewinnen die Gleichungen dadurch nicht an Brauchbarkeit für die numerische Rechnung.

Um mit Hilfe dieser Gleichungen den Flächenhalo für eine gegebene Sonnenhöhe zu konstruieren, lassen wir φ von 10 zu 10 Grad wachsen und rechnen das Gleichungssystem für jeden dieser Werte durch. Tragen wir dann in einem Gradnetz in stereographischer Zenitalprojektion am Horizont die Werte φ ab, so sind dies die Mittelpunkte der Elementarbogen, deren Radius jeweils $90 - h'_\sigma$ ist, und deren beide Enden jeweils durch die zugehörigen zwei Werte von h_σ und δ gegeben sind. Die Elementarbogen lassen sich dann in dieser Projektion mit dem Zirkel zeichnen, wobei der Verschiebung der Mittelpunkte Rechnung zu tragen ist, und ihre Überlagerung ergibt ein gutes Bild des Flächenhalos, auch hinsichtlich der Helligkeitsverteilung, da eben alle Werte φ in der Eisolke gleich häufig sein werden.

Um überflüssige Rechnungen zu sparen, muß man wissen, zwischen welchen Grenzen des Azimuts φ der Kristallhauptachsen noch Beiträge zum Halo geliefert werden.

Dazu berücksichtigen wir, daß der Zirkumzenitalbogen begrenzt war zwischen den Sonnenhöhen 0° (streifender Einfall) und $32,3^\circ$ (Totalreflexion). Dem streifenden Einfall entsprechen bei uns ein für allemal die Werte $\varphi = +90^\circ$ und $\varphi = -90^\circ$. Für den Beginn der Totalreflexion aber haben wir $h'_s = 32,3^\circ$, also nach der ersten unserer Gleichungen:

$$\cos \varphi_o = \frac{\sin 32,3^\circ}{\cos h_s}$$

woraus sich folgende Anfangswerte φ_o ergeben (aus Symmetriegründen genügt es, positive Werte von φ zu benutzen):

h_s	0	10	20	30	40	50	57,7 bis 90°
φ_o	57,7	57,1	55,3	51,9	45,7	33,7	0

Während also bei Sonnenhöhen über $57,7^\circ$ φ von 0 bis 90° variiert werden muß, genügt bei kleineren Sonnenhöhen ein Variieren von φ_o bis 90° . Darin kommt zum Ausdruck, daß im letzteren Falle der Halo aus zwei getrennten »seitlich unteren« Berührungsbogen besteht, während sich diese bei höherem Sonnenstande unterhalb des großen Ringes zusammenschließen.

Bei Horizontstand der Sonne ist auf diese Weise noch mehr als die Hälfte aller Eiskristalle unwirksam.

Zahlenwerte. In der folgenden Tabelle ist das Ergebnis der Rechnung für die Sonnenhöhe $h_s = 20^\circ$ dargestellt. Der Halo ist hier noch geteilt:

φ	55,3	60	70	80	90°	
$90 - h'_s$	0	15,0	25,3	30,6	32,3	
h_s	o	0	15,1	25,2	29,9	31,5
	u	0	-11,5	-16,6	-18,5	-19,0
δ	o	55,3	55,3	66,2	73,3	82,2
	u	55,3	50,5	50,8	55,6	63,2

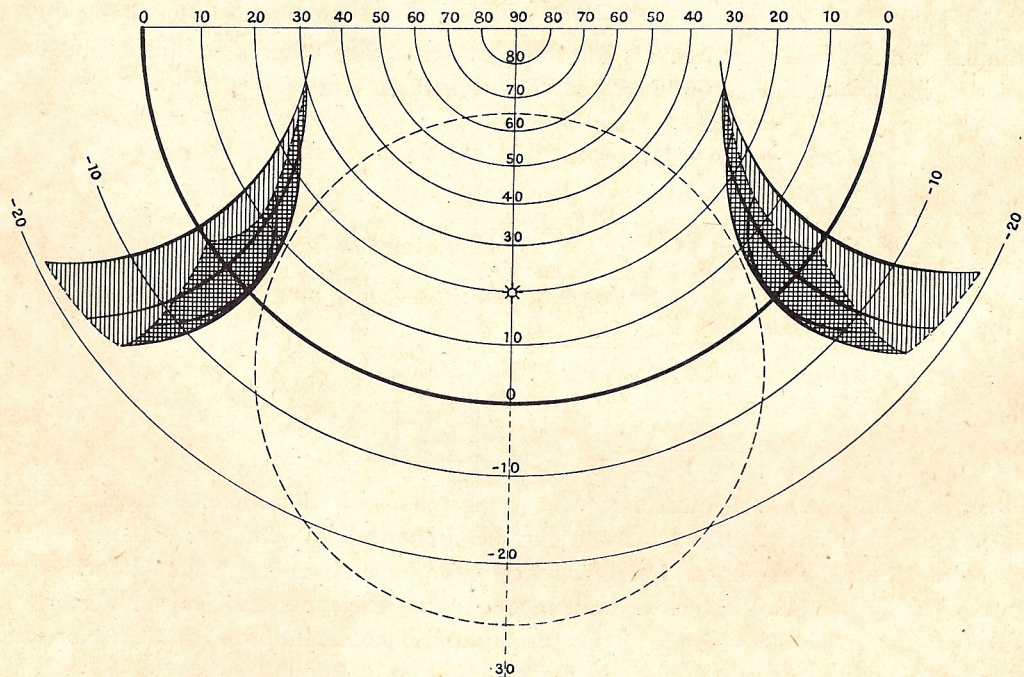


Fig. 11.

Diese Ergebnisse sind in der angegebenen Weise in Fig. 11 in stereographischer Zenitalprojektion veranschaulicht. Zur Orientierung ist auch der große Ring mitgezeichnet. Die Fläche des Halos ist schraffiert; doppelt, soweit sie bei der Azimutdrehung der Kristall-Hauptachsen doppelt bestrichen wird.

Als zweites Rechnungsbeispiel sind in der folgenden Tabelle die Werte für die Sonnenhöhe $h_s = 60^\circ$ angegeben, bei welcher die beiden Teile des Halos sich zusammengeschlossen haben:

φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°	
$90 - h'_\sigma$	10,8	12,2	15,0	18,5	22,1	25,3	28,0	30,6	31,7	32,3	
h_σ	o	+ 2,4	4,0	6,9	10,8	15,2	19,3	22,8	26,0	27,4	28,2
	u	+ 2,4	1,8	1,5	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	1,2
δ	o	+ 10,8	21,6	33,4	45,0	55,9	66,8	76,8	86,8	96,3	106,3
	u	- 10,8	- 2,2	+ 5,0	11,5	17,9	24,7	32,0	39,4	48,3	57,7

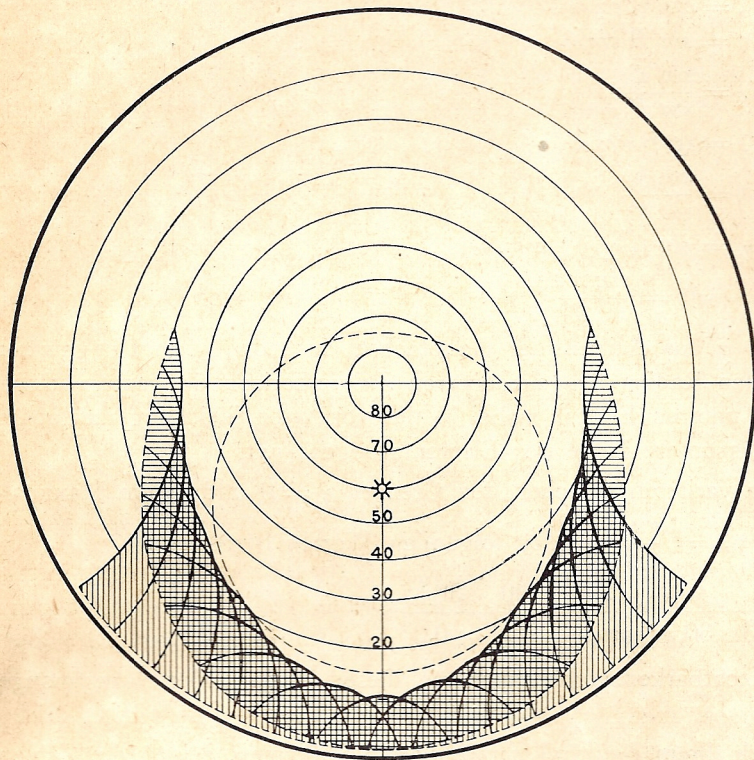


Fig. 12.

Da $\frac{A}{2} = 45^\circ$ zu setzen ist, wird $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2}$ und folglich $h'_\sigma = 90 - h'_s$. h'_s wird $22,1^\circ$.

Damit schreiben sich die sechste, erste und siebente Gleichung unseres Systems (δ' ist gleich Null zu setzen):

$$\begin{cases} \sin h_\sigma = \sin \nu \cos h'_\sigma = \sin h_s \frac{\sin h'_s}{\cos h'_s} = [\operatorname{tg} h'_s] \sin h_s \\ \cos \varphi = [\sin h'_s] \frac{1}{\cos h_s} \\ \cos (\varphi - \delta) = [\cos h'_s] \frac{1}{\cos h_\sigma} \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich folgende Werte für die Höhe und das Azimut der Berührungspunkte:

Sonnenhöhe	0	10	20	30	40	50	60	67,9°
h_σ	0,0	4,0	8,0	11,7	15,2	18,2	20,6	22,1
δ	+ 45,7	+ 45,7	+ 45,7	+ 45,3	+ 44,2	+ 41,2	+ 32,9	0,0

Bei der Sonnenhöhe $67,9^\circ$ sind also die beiden Berührungspunkte im Sonnenvertikal vereinigt. Bei noch größerer Sonnenhöhe ist der Halo ganz abgelöst vom großen Ring.

Bei Sonnenhöhen über $57,7^\circ$, d. h. wenn die beiden Teile des Halos zusammengewachsen sind, könnte man statt dessen auch den Sonnenabstand im Sonnenvertikal messen. Man sieht ohne Rechnung, daß

In Fig. 12 ist diese Form des Halos in stereographischer Zenitalprojektion dargestellt.

Diese Theorie durch Messungen zu verifizieren, ist deshalb einigermaßen schwierig, weil der Halo kaum irgend welche markanten Punkte für die Messung darbietet. Am ehesten eignen sich dazu noch die Punkte der Berührung mit dem großen Ring, die auch durch größte Lichtstärke ausgezeichnet sind, weil der Strahlengang hierbei dem Minimum der Ablenkung entspricht.

Es ist dann $\delta' = \frac{A}{2}$, und die zweite und dritte Gleichung unseres Systems ergeben dann für h'_s und h'_σ konstante Werte, nämlich

$$\cos h'_s = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B} \quad \text{und} \quad \sin h'_\sigma = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin B}$$

sich dieser Sonnenabstand unmittelbar aus der Theorie des unteren Zirkumzenitalbogens oder Zirkumhorizontalbogens ergibt. Die beiden Halos fallen in diesem Punkte vollständig zusammen.

Fallen die Sonnenstrahlen bei horizontaler Lage der Hauptachse zuerst nicht auf eine der Basisflächen, sondern auf eine Seitenfläche, und findet der Austritt an einer Basisfläche statt, so müßten seitlich obere Berührungsbogen des großen Ringes entstehen.

Die Theorie dieser Bogen gestaltet sich ganz analog dem vorangehenden, nur haben wir statt des Zirkumzenitalbogens jetzt den Zirkumhorizontalbogen als Element zu benutzen. Die Schlußgleichungen, auf deren Ableitung wir verzichten können, lauten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin h'_s = \cos h_s \cos \varphi \\ \cos \beta' = \sin B \sin h'_s \\ \cos h'_\sigma = \frac{\sin \beta'}{\sin B} \\ \operatorname{ctg} \delta' = \operatorname{tg} B \cos h'_s \\ \sin \nu = \frac{\sin h_s}{\cos h'_s} \\ \sin h_\sigma = \sin (\nu + \delta') \cos h'_\sigma \\ \cos (\varphi + \delta) = \frac{\sin h'_\sigma}{\cos h_\sigma} \end{array} \right.$$

Hierin bedeuten: h_s die Sonnenhöhe, φ das Azimut der Hauptachse, das von 10 zu 10° gewählt wird, h'_s , β' , δ' , ν Hilfswinkel, $90 - h'_\sigma$ den Radius des elementaren Zirkumhorizontalbogens, und h_σ und δ Höhe und Azimut seines oberen und unteren Endes, wobei in der vorletzten Gleichung das obere Vorzeichen für das obere, das untere für das untere Ende des Elementarbogens gilt.

Das Azimut der Hauptachse φ ist zu variieren zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und einem Maximalwert φ_m , der sich nach der Gleichung $\cos \varphi_m = \frac{\sin 57,7^\circ}{\cos h_s}$ zu folgenden Werten berechnet:

h_s	0	10	20	30	32,3°
φ_m	32,3	30,9	25,9	12,6	0,0

Es ist leicht einzusehen, daß die Sichtbarkeitsverhältnisse für diesen Halo äußerst ungünstig sein müssen.

Auch wenn die Kristalle nämlich nach ihrem Bau voll zur Wirksamkeit kämen, zeigen die Zahlen für φ_m , daß selbst bei der günstigsten Sonnenstellung ($h_s = 0$) bereits fast $\frac{2}{3}$ aller Kristalle unwirksam sind, und daß bei $32,3^\circ$ überhaupt alle Kristalle aufgehört haben, einen Beitrag zum Halo zu liefern.

Dazu kommt aber noch ein Moment, das wir bereits bei Besprechung des Zirkumhorizontalbogens hervorgehoben haben. Die länglichen Säulchen, welche bei horizontaler Hauptachse anzunehmen sind, tragen nämlich meist an den Enden kleine Plättchen. Bei so großem Einfallswinkel wie hier werden diese randlichen Hervorragungen einen großen Teil der Seitenflächen beschatten und die Sichtbarkeit dieses Halos weiter ungünstig beeinflussen.

So ist es nicht zu verwundern, daß nach Pernter-Exner anscheinend bisher nur eine einzige unsichere Beobachtung dieser seitlich oberen Berührungsbogen erhalten worden ist, während die seitlich unteren eine recht häufige Erscheinung sind.

9. Spiegelhalos mit einfacher Spiegelung.

Bei idealer Unordnung der Kristalle kann die einmalige Spiegelung nur eine allgemeine Aufhellung des Himmels, aber keinen eigentlichen Halo erzeugen.

Im Falle vertikaler Hauptachsen bedarf es keiner Rechnung. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Spiegelung an den vertikalen Seitenflächen den Horizontalkreis, diejenige an den horizontalen Basisflächen die Untersonne ergibt.

Auch bei horizontaler Hauptachse liefert die einfache Spiegelung an den jetzt vertikal stehenden Basisflächen ohne Rechnung den Horizontalkreis. Dieser kann also auf zwei verschiedene Weisen erzeugt werden. Bei hohem Sonnenstand dürfte dabei die zweite Entstehungsweise die häufigere sein, da, wie mehrfach betont, bei vertikaler Hauptachse die Prismen häufig am oberen Ende Plättchen tragen, welche die Seitenflächen beschatten. Die Beobachtungen scheinen in der Tat auf eine solche Bevorzugung der Entstehung bei horizontaler Hauptachse hinzudeuten, wie aus dem gleichzeitigen Auftreten des umschriebenen Halos bei Abwesenheit solcher, die auf vertikale Hauptachse schließen lassen, zu folgern ist.¹⁾

Einer eigentlichen Theorie bedarf es nur für die Spiegelung an den Seitenflächen bei horizontaler Hauptachse, durch welche der Lichtsäulenhalo entsteht.

Stuchtey hat die Theorie dieses Halos entwickelt. Er geht dabei allerdings zunächst von der Annahme von Schwankungen der Hauptachse um die Vertikale aus, zieht aber auch den Fall horizontaler Hauptachsen mit Rotation um dieselbe in Betracht.

Da wir nun sonst nirgends zur Erklärung der Haupthalos Schwankungen um die bevorzugte Orientierung anzunehmen brauchen, dürfte diese Erklärung auch bei den Lichtsäulen erst in zweiter Linie in Frage kommen, und auch hier die Annahme horizontaler Hauptachsen mit Rotation um diese, oder doch mit allen Rotationsphasen, den Vorzug verdienen.

An Stelle der von Stuchtey durchgeführten Rechnungen genügt es, eine einfache Überlegung anzustellen. Wir greifen aus der Eiswolke, die nur Kristalle mit horizontaler Hauptachse enthalten möge, alle diejenigen Kristalle heraus, deren Hauptachsen das gleiche Azimut φ haben. Denken wir uns dann diese Richtung als Zenit, so muß diese Kristallgruppe durch die Spiegelung an den Seitenflächen offenbar einen Horizontalkreis liefern, d. h. in Wirklichkeit einen geschlossenen Kreis, dessen Mittelpunkt im Horizont im Azimut φ liegt, und der durch die Sonne und folglich auch durch die Untersonne geht. Variieren wir φ zwischen -90 und $+90^\circ$, so variiert der Radius dieses Kreises zwischen 90° , h_s , und wieder 90° , und der Kreis bestreicht dabei den ganzen Himmel. Es wird also ein Halo erzeugt, der sich über die ganze Himmelskugel erstreckt. Da aber alle diese elementaren »Horizontalkreise« sowohl durch die Sonne als durch die Untersonne gehen, erhalten wir an diesen zwei Punkten Lichtknoten, und außerdem, besonders bei niedrigem Sonnenstand, eine Lichtlinie im Sonnenvertikal, eben die Lichtsäule.

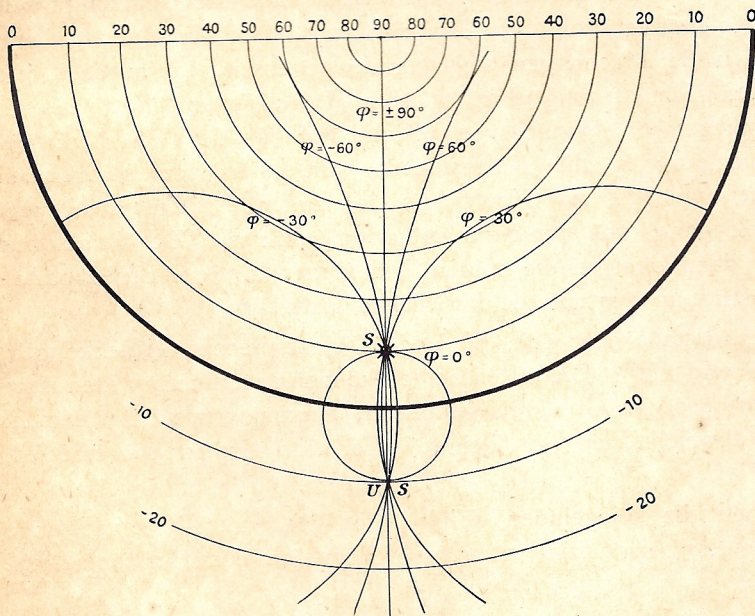


Fig. 13.

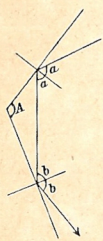
Man kann ohne Schwierigkeit diese elementaren »Horizontalkreise« in stereographischer Zenitalprojektion konstruieren und so ein Bild des Halos gewinnen. Diese Konstruktion ist in Fig. 13 für die Sonnenhöhe $h_s = 10^\circ$ durchgeführt. Man zeichnet in das Gradnetz zunächst Sonne und Untersonne, letztere bei $h = -10^\circ$ ein. Errichtet man dann auf der Verbindungslinie beider die Mittelsenkrechte, so müssen die Kreise, deren Mittelpunkte in Wirklichkeit stets im Horizont liegen, in der Projektion ihre Mittelpunkte stets auf dieser Linie haben, da sie sowohl durch Sonne als durch Untersonne gehen müssen und wieder als Kreise zu zeichnen sind. Da die Azimute der Kreiszentren (die äquidistant gewählt werden) unverändert bleiben, lassen sich

¹⁾ Vgl. z. B. die Figur 86 auf S. 285 der 2. Aufl. von Pernter-Exner, Meteorologische Optik.

die für den Zirkel zu benutzenden Mittelpunkte als Schnittpunkte der Azimutstrahlen mit der genannten Mittelsenkrechten sofort angeben und die Kreise dann mit dem Zirkel zeichnen. In der Figur haben wir das Azimut der Hauptachsen von 30 zu 30^0 wachsen lassen. Die Lichtkonzentration im Sonnenvertikal tritt ohne weiteres hervor. Sie ist am stärksten bei Horizontstand der Sonne, während bei höherem Sonnenstand nur die Lichtknoten in der Sonne und der Untersonne übrig bleiben.¹⁾

10. Spiegelhalos mit doppelter Spiegelung.

Die Lichtverluste, welche die doppelte Spiegelung im Vergleich zur einfachen mit sich bringt, bewirken, daß hier hauptsächlich nur Punkthalos zur Beobachtung gelangen, in denen die größte Lichtkonzentration herrscht. Die auf doppelter Spiegelung beruhenden Linienhalos sind dagegen mit Sicherheit wohl noch nicht beobachtet.



Bei doppelter Spiegelung wirkt eine Kante des Kristalls als Winkelspiegel. Das Prinzip eines solchen ist für den Fall, daß der Strahlengang in die Normalebene der spiegelnden Kante fällt, in Fig. 14 dargestellt. Ist A der spiegelnde Winkel, a der Einfallswinkel an der ersten, b an der zweiten Fläche, so ist

$$a + b = A$$

und die ganze Drehung oder Ablenkung, die der Strahl erfährt, wird

$$D = 180 - 2a + 180 - 2b = 360 - 2A$$

Die Ablenkung ist also unabhängig vom Einfallswinkel a oder, innerhalb gewisser Grenzen, von der Stellung des Winkelspiegels zum Lichtstrahl. Hierauf beruht die Möglichkeit der Halobildung durch doppelte Spiegelung, denn das Licht erfährt so durch eine größere Zahl von Kristallen dieselbe Ablenkung D .

Verläuft der Strahlengang nicht in der Normalebene der spiegelnden Kante, so gilt die angeführte Beziehung für die Projektion auf die Normalebene, wie unmittelbar einleuchtet.

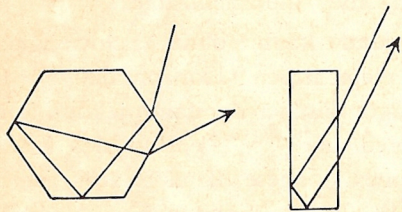


Fig. 15.

Da es sich um innere Spiegelung handelt, der Strahl aber beim Ein- und Austritt gebrochen wird, kann die Unabhängigkeit der Ablenkung vom Einfallswinkel nur dann erhalten bleiben, wenn beide Brechungen sich gerade gegenseitig aufheben. Wie dies möglich ist, zeigt Fig. 15 nach Mascart und Bravais für die spiegelnden Winkel von 60 und 90^0 für den Fall, daß der Strahlengang in die Normalebene fällt. Für den spiegelnden Winkel von 120^0 hat Hastings eine andere Erklärung gegeben, die nur bei stärkerer Abweichung des Strahlengangs von der Normalebene möglich ist: Der Strahl tritt an der einen Basisfläche des Kristalls ein, dann erfolgen die beiden Reflexionen an zwei benachbarten Seitenflächen, und schließlich findet der Austritt an der unteren Basisfläche statt.

Den drei spiegelnden Winkeln der Eiskristalle von 120 , 60 und 90^0 entsprechen Ablenkungen, bezogen auf die Normalebene, von 120 , 240 und 180^0 . Die ersten beiden können natürlich nur identische Erscheinungen liefern. Diese Zahlen stellen also, im Großkreis gemessen, Maximalwerte dar; je mehr der Strahlengang von der Normalebene abweicht, um so kleiner wird, im Großkreis gemessen, die Ablenkung.

Bei vertikaler Hauptachse ergeben die spiegelnden Winkel von 60 und 120^0 , wie ohne weiteres ersichtlich, die Nebengegensonnen in 120^0 Azimutdifferenz von der Sonne auf dem Horizontalkreis.

¹⁾ In Übereinstimmung hiermit gibt R. Meyer folgende Zahlen für die absolute Häufigkeit der Lichtsäulen bei verschiedenen Sonnenhöhen:

	h_s	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50 ⁰
Häufigkeit der Lichtsäulen		106	18	11	4	5	1	1	1	1	1	0

Die Wirkung des spiegelnden Winkels von 90° läßt sich durch eine einfache Überlegung ermitteln. Die eine Fläche des Winkelspiegels muß bei vertikaler Hauptachse offenbar bei allen Kristallen horizontal liegen und würde also für sich allein die Untersonne liefern.

Die Gesamtwirkung muß also dieselbe sein, als stände die Sonne am Ort der Untersonne und als wären nur die zweiten Flächen des Winkelspiegels vorhanden, die alle vertikal stehen, doch nach verschiedenen Azimuten orientiert, so daß sie einen Horizontalbogen liefern, der in diesem Falle unter dem Horizont liegt und in seiner Verlängerung durch die Untersonne geht. Beobachtungen eines solchen unteren Horizontalkreises existieren bisher nicht.

Liegt die Hauptachse horizontal, so kann man sich die Verhältnisse klar machen, indem man zunächst die Wirkung aller derjenigen Kristalle zusammenfaßt, deren Hauptachse das gemeinsame Azimut φ hat, und dann φ variiert. Betrachtet man dabei die Richtung φ als Zenitrichtung, so haben wir den vorigen Fall, und jede solche Kristallgruppe wird also durch ihre spiegelnden Winkel von 120° und 60° zwei »Nebengegensonnen« erzeugen, die sich bei Variieren von φ längs einer Linie am Himmel verschieben. Die leicht abzuleitenden Gleichungen dieses bisher mit Sicherheit nicht festgestellten Halos lauten:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \nu &= \frac{\operatorname{tg} h_s}{\sin \varphi} \quad (\text{Hilfswinkel } \nu) \\ \sin h_\sigma &= \sin h_s \frac{\sin (60^\circ - \nu)}{\sin \nu} \\ \cos (\delta - \varphi) &= \frac{\cos h_s}{\cos h_\sigma} \cos \varphi \end{aligned} \right\} h_\sigma, \delta \text{ Höhe und Azimut des Halopunktes.}$$

Dieser Halo stellt einen schrägen Bogen auf der der Sonne abgekehrten Seite des Himmels dar. Sein Schnitt mit dem Horizont ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \varphi &= \operatorname{tg} h_s \operatorname{tg} 30^\circ \\ \cos (\delta - \varphi) &= \cos h_s \cos \varphi \end{aligned} \right.$$

Sein Schnitt mit dem Horizontalkreis ist gegeben durch

$$\sin \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} h_s \operatorname{tg} 60^\circ$$

so daß er bei der Sonnenhöhe $26,6^\circ$ gerade durch die Nebengegensonnen geht.

Seine Höhe in 180° Azimut endlich ist $h_\sigma = 60 - h_s$. Man kann nicht erwarten, daß dieser Halo mit größerer Intensität auftritt, da wir uns das Licht der Nebengegensonnen hier längs dieser ganzen Linie verteilt denken müssen. Immerhin ist beachtenswert, daß recht häufig bei Sonnenhöhen, die etwa dem berechneten Wert von $26,6^\circ$ entsprechen, schräge Bogen durch die Nebengegensonnen beobachtet worden sind. Sollten diese Bogen identisch mit dem berechneten Halo sein, so müßte ihr Schnittpunkt mit dem Horizontalkreis bei anderen Sonnenhöhen von den Nebengegensonnen abrücken, worüber aber bisher nichts bekannt ist.

Wenden wir denselben Gedankengang auch bei dem spiegelnden Winkel von 90° an, so ergibt sich, daß die elementaren unteren Horizontalbogen, die durch die verschiedenen Hauptachsenazimute φ erzeugt werden, sich sämtlich im wahren Gegenpunkt der Sonne, d. h. in Richtung des Schattens des Beobachters, schneiden, so daß hier ein Lichtknoten (wahre Gegensonne) zu erwarten ist. Beobachtet ist aber auch diese Erscheinung bisher nicht.

Sind endlich die Hauptachsen ideal ungeordnet, so daß nur invariable Halos entstehen, so müßte der spiegelnde Winkel von 60° einen Kreis von 120° Radius um die Sonne, und der von 90° einen Lichtpunkt im wahren Gegenpunkt der Sonne erzeugen. Der Winkel von 120° kommt hier nicht in Betracht, da er nach unseren bisherigen Kenntnissen nicht den Strahlengang in der Normalebene zuläßt, so daß auch das Maximum der Ablenkung hier nicht erreicht werden kann. Auch diese Erscheinungen, die freilich nur schwach sein können, sind bisher nicht mit Sicherheit bekannt.

11. Halos, die auf Spiegelung und Brechung beruhen.

Theoretisch muß diese Gruppe sehr groß sein, doch werden die meisten Halos dieser Art zu lichtschwach sein, um beobachtet zu werden. Bisher sind nur zwei Halos dieser Art bekannt, und zwar sind es solche, die, von der Spiegelung abgesehen, gerade den hellsten Brechungshalos entsprechen. Wir wollen im folgenden nur diese beiden Arten behandeln.

a. **Der untere Nebensonnenhalo.** Die Theorie dieses Halos ist vom Verfasser entwickelt worden. Sie läßt sich durch eine einfache Überlegung auf die Theorie des gewöhnlichen Nebensonnenhalos zurückführen. Zu dem Strahlengang bei dem letzteren tritt nur noch eine Reflexion an der unteren Basisfläche der Kristalle hinzu. Diese Reflexion läßt die Azimute unverändert und kehrt nur das Vorzeichen der Höhen um. Bezeichnen also h_σ und δ_σ Höhe und Azimut im gewöhnlichen Nebensonnenhalo, h_Σ und δ_Σ dieselben Größen im unteren Nebensonnenhalo, so haben wir die Gleichungen des ersteren nur zu ergänzen durch

$$\begin{cases} h_\Sigma = -h_\sigma \\ \delta_\Sigma = \delta_\sigma \end{cases}$$

Im übrigen gilt alles beim Nebensonnenhalo Gesagte auch für den unteren Nebensonnenhalo.

Bisher ist, soweit bekannt, nur eine (ursprünglich mißverständene) Beobachtung dieses Halos von Pernter erhalten worden, doch war die Erscheinung dabei sehr lichtstark. Auch im Experiment mit einem rotierenden künstlichen Kristall zeigen sich die unteren Nebensonnen mit sehr bedeutender Intensität. Der Mangel an Beobachtungen dürfte also hauptsächlich dem Umstand zuzuschreiben sein, daß sie nur unter dem Horizont auftreten.¹⁾

b. **Der Gegensonnenhalo.** Die Theorie der Gegensonnenhalos wird im folgenden erstmalig entwickelt.²⁾ Der Strahlengang ist derselbe wie beim umschriebenen Halo, nur tritt noch eine Reflexion an einer Basisfläche hinzu.

Wir greifen zurück auf Fig. 4. Z' war das Azimut der Hauptachse des betrachteten Kristalls. Nehmen wir dies als Zenit, und folglich den Großkreis HZH als Horizont, so entstehen ohne diese Reflexion die beiden Nebensonnen Σ und Σ_1 . Tritt nun die Reflexion an der Basisfläche hinzu, so entstehen statt dessen »untere Nebensonnen«, die in der Figur auf der Rückseite der Sphäre liegen würden. Da untere und obere Nebensonnen symmetrisch zu HZH angeordnet sein müssen, so müssen offenbar ihre wirklichen Höhen gleich denen von Σ bzw. Σ_1 sein.

Um die Bezeichnungen des Abschnittes 5 nicht ändern zu brauchen, wollen wir die Höhe und das Azimut für die Punkte des Gegensonnenhalos h_Σ und δ_Σ nennen, während h_σ und δ_σ wie früher die entsprechenden Werte für den umschriebenen Halo darstellen. Wir haben dann ohne weiteres

$$h_\Sigma = h_\sigma \quad (1)$$

Das Azimut δ_Σ muß wegen der Symmetrie zur Ebene HZH offenbar gleich $DH + \mathcal{F}H$ sein, d. h.

$$-\delta_\Sigma = 180 - 2\varphi + \delta_\sigma \quad (2)$$

¹⁾ Inzwischen sind noch einige Beobachtungen von Fagermo in Met. Zeitschr. 1925, S. 272, mitgeteilt worden.

²⁾ Hastings hat allerdings bereits eine Theorie dieses Halos gegeben, die aber weniger wahrscheinlich ist. Er nimmt an, daß die Nebenachsen gleichfalls orientierende Wirkung haben, und also nicht nur die Hauptachse, sondern auch eine der Nebenachsen dauernd horizontal liegt. Diese Erklärung scheint in der Tat für den weiter unten zu besprechenden Parryschen Halo zuzutreffen, der an Stelle des umschriebenen Halos bei dieser Fixierung der Nebenachsen entsteht. Von dem Parryschen Halo gibt es einige Beobachtungen, doch ist er selten und lichtschwach, sehr im Gegensatz zum umschriebenen Halo. Die Hastingsche Theorie läuft nun darauf hinaus, den Gegensonnenhalo als die Spiegelung des Parryschen Halos zu betrachten, während wir ihn als die entsprechende Spiegelung des umschriebenen Halos erklären. Der von Hastings berechnete Halo muß also zwar theoretisch existieren, aber an Lichtstärke hinter dem unsrigen um ebensoviel zurückbleiben, wie es der Parrysche Halo hinter dem umschriebenen Halo tut, d. h. aber, er wird überhaupt nicht in Erscheinung treten. Die vorhandenen Beobachtungen des Gegensonnenhalos müssen vielmehr wohl ausnahmslos nach unserer Theorie erklärt werden.

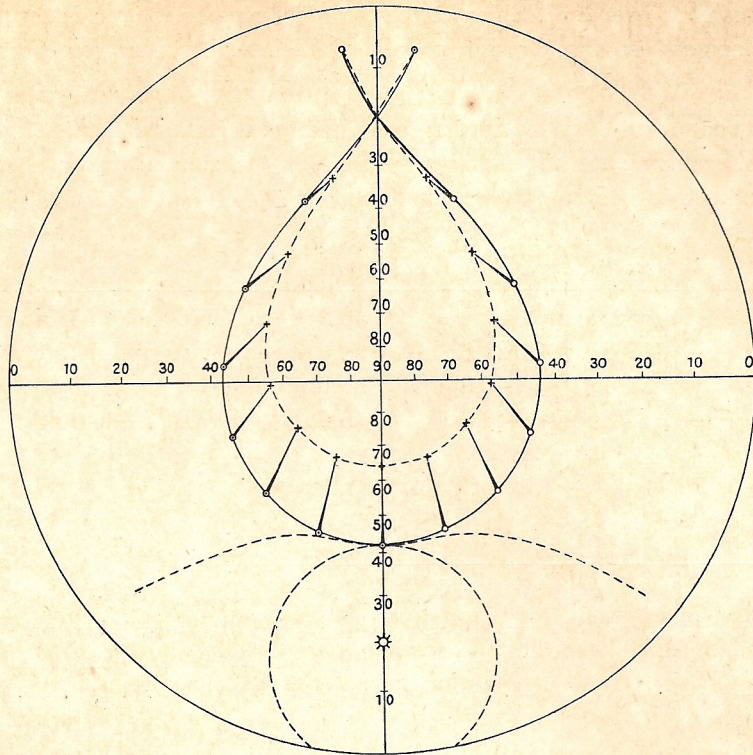


Fig. 16.

Wir brauchen also dem Gleichungssystem für den umschriebenen Halo nur noch diese beiden Gleichungen hinzuzufügen, um sofort die Gleichungen des Gegenonnenhalos zu erhalten.

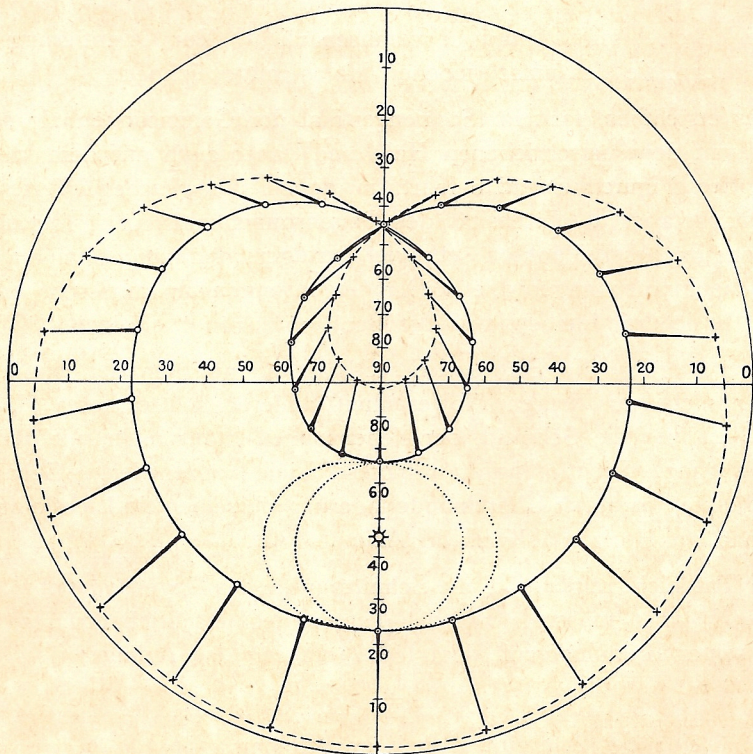


Fig. 17.

Wir können daher auch aus den Zahlenwerten für den umschriebenen Halo mit Hilfe dieser beiden Gleichungen sofort diejenigen für den Gegen Sonnenhalo ableiten. In den folgenden beiden Tabellen ist dies für die Sonnenhöhen 20 und 45° geschehen. Bei der ersteren ist nur die Spiegelung des oberen Berührungsbogens berücksichtigt, da die des unteren ganz unter dem Horizont verläuft. Bei der Sonnenhöhe von 45° liegen alle Teile über dem Horizont:

		Sonnenhöhe 20°										
		φ	21,8	30	40	50	60	70	80	90°		
Oberer Teil	}	$h_{\Sigma,i}$	7,5	34,9	41,7	43,2	43,0	42,4	42,0	41,8		
		$\delta_{\Sigma,i}$	+ 173,5	— 157,2	— 124,6	— 95,9	— 70,0	— 45,8	— 22,7	0,0		
		$h_{\Sigma,a}$	7,5	31,6	43,9	51,7	57,1	60,6	62,8	63,6		
		$\delta_{\Sigma,a}$	+ 173,5	— 166,8	— 143,8	— 116,6	— 89,8	— 60,9	— 30,9	0,0		
		Sonnenhöhe 45°										
		φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90°
Oberer Teil	}	$h_{\Sigma,i}$	31,5	37,8	44,9	51,6	57,1	61,2	64,0	65,6	66,5	66,8
		$\delta_{\Sigma,i}$	+ 146,0	+ 161,8	+ 179,9	— 159,4	— 136,3	— 110,7	— 83,6	— 55,8	— 27,9	0,0
		$h_{\Sigma,a}$	19,1	26,5	35,1	44,0	52,6	60,9	68,6	75,9	82,9	88,3
		$\delta_{\Sigma,a}$	+ 140,0	+ 151,1	+ 164,3	+ 178,3	— 166,9	— 150,9	— 134,0	— 116,8	— 93,5	0,0
Unterer Teil	}	$h_{\Sigma,i}$	31,5	26,8	24,1	22,8	22,4	22,4	22,7	23,0	23,1	23,2
		$\delta_{\Sigma,i}$	— 146,0	— 131,3	— 116,7	— 101,6	— 85,9	— 69,4	— 52,5	— 35,2	— 17,7	0,0
		$h_{\Sigma,a}$	19,1	13,4	9,3	6,5	4,6	3,3	2,5	1,9	1,7	1,6
		$\delta_{\Sigma,a}$	— 140,0	— 125,7	— 112,3	— 98,0	— 82,9	— 67,1	— 50,7	— 34,0	— 17,1	0,0

Diese Zahlen sind durch Figur 16 und 17 veranschaulicht. Zur Orientierung ist in ihnen auch der kleine Ring sowie die Brennlinie des umschriebenen Halos mitgezeichnet.

Wie ohne weiteres ersichtlich, fällt im Sonnenvertikal der Gegen Sonnenhalo sowohl über wie unter der Sonne vollkommen mit dem umschriebenen Halo und daher auch mit dem kleinen Ring zusammen. Wie ein Vergleich mit den Figuren 5 und 6 lehrt, in denen die gleichen Werte φ des Achsenazimuts zugrunde gelegt wurden, ist aber die Intensität des Gegen Sonnenhalos, ganz abgesehen von dem Lichtverlust bei der Reflexion, in diesen Punkten sehr viel geringer; denn die elementaren Nebensonnen sind mit viel größeren Zwischenräumen angeordnet. Der Gegen Sonnenhalo muß also an diesen Stellen völlig überstrahlt werden und unsichtbar bleiben, was die Beobachtungen bestätigen.

Sehr viel günstiger werden die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der der Sonne gegenüber liegenden Himmelsseite, und zwar nicht nur wegen Abwesenheit anderer lichtstärkerer Halos, sondern ganz besonders auch deshalb, weil hier die Schweife der Nebensonnen immer mehr mit der Brennlinie zusammenfallen, so daß sich die ganze Lichtintensität auf diese Linie konzentriert. Genau ist dies der Fall im Schnittpunkt der beiden Äste, wo durch Übereinanderlagerung derselben ein Lichtknoten, die Gegen Sonne, entsteht. Sie liegt genau im Horizontal-Kreis im Azimut 180°.

Es läßt sich in der Tat leicht zeigen, daß die Schnittpunkte des Gegen Sonnenhalos mit dem Horizontal-Kreis das Azimut $\pm 180^\circ$ haben müssen. Bei der Theorie des umschriebenen Halos war gezeigt worden, daß die Schnittpunkte seiner Brennlinie mit dem Horizontalring das Azimut

$$\delta_{\sigma} = 2\varphi$$

haben müssen. Unsere Gleichung (2) ergibt hiermit unmittelbar

$$\delta_{\Sigma} = -180^\circ$$

Die Gegen Sonne kann erst von derjenigen Sonnenhöhe ab existieren, bei welcher sich die Äste des oberen Berührungsbogens des kleinen Ringes bis zum Horizontal-Kreis herabsenken, d. h., wie oben gezeigt wurde, von $h_s = 14,1^{\circ}$ ab.¹⁾

Obwohl beim Gegen Sonnenhalo dieselbe Brechung zugrunde liegt wie beim umschriebenen Halo, sieht man doch leicht, daß die Gegen Sonne selbst farblos erscheinen muß, weil die Dispersion sich gerade in Richtung der Brennlinie vollzieht, so daß die Farben sich genau überdecken. In größerem Abstände von diesem Punkt sollten allerdings wieder schwache Farbenränder auftreten.

Die Beobachtungen scheinen diese Theorie des Gegen Sonnenhalos durchaus zu bestätigen. Sie zeigen insbesondere, daß die Gegen Sonne hauptsächlich bei Anwesenheit des umschriebenen Halos auftritt. Die gekreuzten Bogen sind meist bis beiderseits des Zenits zu verfolgen. Auf der Sonnenseite verlieren sie sich allmählich.

12. Der Halo von Parry.

Zum Schluß sei noch die Theorie des Halos von Parry entwickelt, des einzigen bekannten Halos, der auf einer orientierenden Wirkung der Nebenachsen beruht. Die richtige Erklärung wurde bereits von Hastings gegeben, doch ist die Theorie von ihm nicht eingehend dargestellt. In der zweiten Auflage von Pernter-Exners Meteorologischer Optik ist gleichfalls der Strahlengang richtig beschrieben, doch ist die dortige Angabe, daß dieser Halo das Stück eines Horizontal-Kreises bildet, nicht zutreffend.

Der Parrysche Halo entsteht durch den brechenden Winkel von 60° dann, wenn nicht nur die Hauptachse, sondern auch eine der Nebenachsen des Eiskristalls dauernd horizontal liegt, so daß die Horizontalprojektion des Kristalls, und damit vermutlich der Luftwiderstand, den größten Wert erreicht. Da die Kristalle dann nur eine einzige Bewegungsfreiheit, nämlich die Azimutänderung der Hauptachse, haben, muß der Parrysche Halo ein Linienhalo sein.

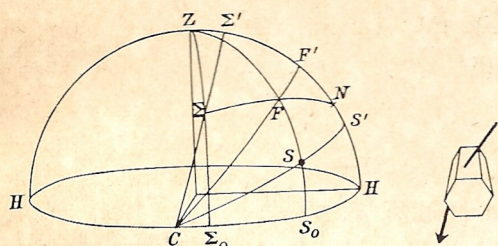


Fig. 18.

Der Beobachter und die Eiswolke befinden sich wieder im Mittelpunkt der von außen betrachteten Himmelskugel (Fig. 18). Alle Hauptachsen liegen horizontal, alle Eintrittsflächen gleichfalls horizontal, so daß ihre Normalen sämtlich nach dem Zenit Z weisen. Wir greifen einen Kristall heraus, der die in der Figur bezeichnete Achsenrichtung habe, so daß seine Hauptachse nach C weist, und HZH die Normalebene des brechenden Winkels von 60° ist. Die Verlängerung des nach innen gerichteten Lotes auf der Austrittsfläche schneidet dann die Sphäre in N, so daß $ZN = A = 60^{\circ}$ ist. S ist die Sonne, F der Zielpunkt der rückwärtigen Verlängerung des Strahls im Innern des Kristalls, und Σ derjenige nach dem Austritt, also der Halopunkt, so daß nach dem Brechungsgesetz sein muß

$$\sin B = \frac{\sin ZF}{\sin ZS} = \frac{\sin NF}{\sin N\Sigma}$$

Wir projizieren von C aus die Punkte Σ, F und S auf ZNH und erhalten die Punkte Σ', F', S'. Σ₀ und S₀ sind die entsprechenden Projektionen vom Zenit auf den Horizont.

Denken wir uns C als Zenit, so wird Σ ein Punkt des Neben Sonnenhalos; daher muß sein

$$\Sigma\Sigma' = SS'$$

¹⁾ In Übereinstimmung hiermit gibt R. Meyer folgende absolute Häufigkeiten für die Gegen Sonne bei verschiedenen Sonnenhöhen:

hs	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65°
Häufigkeit der Gegen Sonne	0	0	1	0	3	2	1	1	1	1	0	1	0	

Wir bezeichnen:

$$\begin{array}{lll}
 SS_o = h_s & SS' = \Sigma \Sigma' = h' & ZS' = a' \\
 \Sigma \Sigma_o = h_\sigma & FF' = k & ZF' = b' \\
 S_o \Sigma_o = \delta & ZS = a (= 90 - h_s) & N\Sigma' = \alpha' \\
 S_o C = \varphi & ZF = b & NF' = \beta' \\
 ZN\Sigma = \nu & N\Sigma = \alpha & \\
 & NF = \beta &
 \end{array}$$

Wir berechnen zunächst h' aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck CS_oS nach dem Satz der drei Kosinusse:

$$\sin h' = \cos \varphi \cos h_s \quad (1)$$

Sodann wenden wir den Sinussatz auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ZFF' und ZSS' mit dem gemeinsamen Winkel bei Z an und erhalten

$$\frac{\sin k}{\sin h'} = \frac{\sin b}{\sin a} = \sin B \quad (2)$$

woraus k berechnet werden kann.

Wenden wir ferner die allgemeine Formel $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}$ (a Hypothense) auf das rechtwinklige Dreieck ZFF' an, so erhalten wir

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} k}{\sin (A - \beta')} \quad (3)$$

woraus β' zu entnehmen ist.

Wenn wir dieselbe Formel auch auf die beiden Dreiecke NFF' und $N\Sigma\Sigma'$ mit dem gemeinsamen Winkel ν anwenden, so wird

$$[\operatorname{tg} \nu =] \frac{\operatorname{tg} k}{\sin \beta'} = \frac{\operatorname{tg} h'}{\sin \alpha'} \quad \text{oder} \quad \sin \alpha' = \frac{\operatorname{tg} h'}{\operatorname{tg} k} \sin \beta' \quad (4)$$

womit auch α' gegeben ist.

Schließlich ergibt im Dreieck $\Sigma \Sigma_o C$ der Sinussatz:

$$\sin h_\sigma = \cos h' \sin (90 - A + \alpha') \quad (5)$$

und der Satz der drei Kosinusse: $\sin h' = \cos (\varphi - \delta) \cos h_\sigma \quad (6)$

Somit lauten die Gleichungen des Parryschen Halos:

$$\left. \begin{array}{l}
 \sin h' = \cos h_s \cos \varphi \\
 \sin k = \sin B \sin h' \\
 \sin (A - \beta') = \operatorname{tg} k \operatorname{tg} \varphi \\
 \sin \alpha' = \frac{\operatorname{tg} h'}{\operatorname{tg} k} \sin \beta'
 \end{array} \right\} \text{Hilfswinkel } h', k, \beta', \alpha'$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \sin h_\sigma = \cos h' \cos (A - \alpha') \\
 \cos (\varphi - \delta) = \frac{\sin h'}{\cos h_\sigma}
 \end{array} \right\} h_\sigma, \delta$$

Für eine gegebene Sonnenhöhe kann man hiernach den Parryschen Halo in Gestalt einer Reihe von Punkten berechnen, die äquidistanten, von 10 zu 10^0 fortschreitenden Werten des Achsenazimuts φ entsprechen.

Um unnötige Rechnungen zu sparen, ist es dabei wichtig zu wissen, innerhalb welcher Grenzen von φ noch Beiträge zum Halo geliefert werden. Die eine Grenze ist offenbar 90^0 , denn bei diesem Azimut verläuft der Strahlengang in der Normalebene, und wir erhalten denjenigen Halopunkt, der im Sonnenvertikal liegt. Aber der Wert $\varphi = 0$ liefert keinen Beitrag mehr zum Halo. Um den ersten wirksamen Wert φ_o zu finden, berücksichtigen wir, daß dabei gerade Totalreflexion an der Austrittsfläche stattfindet, so daß $\alpha = 90$ und $\beta = B$ wird.

Da allgemein $a = 90 - h_s$ und folglich b gegeben ist durch

$$\sin b = \sin B \cos h_s$$

so sind in dem schiefwinkligen Dreieck ZFN in unserem Falle alle drei Seiten bekannt, und der Kosinussatz ergibt

$$\sin \varphi_o = \frac{\cos B - \cos b \cos A}{\sin b \sin A}$$

Hieraus erhält man folgende Minimalwerte φ_o für die verschiedenen Sonnenhöhen:

h_s	0	10	20	30	40	50	60	70	76,5°
φ_o	29,2	29,1	28,6	28,2	28,3	29,7	33,8	46,2	90

φ ist also zwischen φ_o und 90° zu variieren. Bei der Sonnenhöhe 76,5° wird schon $\varphi_o = 90$, d. h. es tritt Totalreflexion schon dann ein, wenn der Strahlengang in die Normalebene des brechenden Winkels fällt. Bei dieser Sonnenhöhe erlischt also der Parrysche Halo völlig.

Unsere Gleichungen ergeben z. B. für die Sonnenhöhe $h_s = 20^\circ$ folgende Punktwerte des Parryschen Halos (φ ist dabei zwischen 28,6 und 90° zu variieren):

φ	28,6	30	40	50	60	70	80	90°
h_σ	29,9	34,5	42,0	45,1	46,9	47,9	48,5	48,7
δ	46,6	39,1	25,7	18,8	13,4	8,7	4,3	0,0

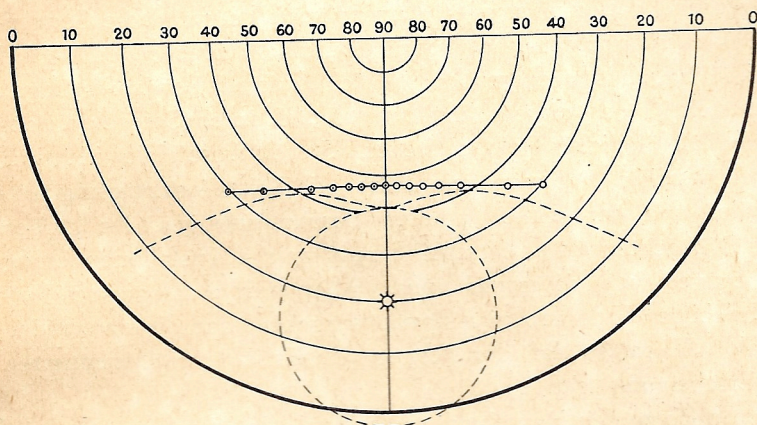


Fig. 19.

Diese Werte sind in Fig. 19 in stereographischer Zenitalprojektion dargestellt. Zum Vergleich ist auch die Brennlinie des umschriebenen Halos nach Fig. 5 und der kleine Ring mitgezeichnet.

Zur Messung eignet sich am besten der Schnittpunkt des Halos mit dem Sonnenvertikal. Hierfür ist die Berechnung viel einfacher:

Zunächst berechnet man b aus

$$\sin b = \cos h_s \sin B \quad (1a)$$

Da jetzt $b + \beta = A$ oder $\beta = A - b$, schreibt sich das Brechungsgesetz für den Austritt:

$$\sin \alpha = \frac{\sin (A - b)}{\sin B}$$

Am Sonnenvertikal läßt sich dann ablesen:

$$h_\sigma = 90 - (A - \alpha)$$

was mit der vorigen Gleichung ergibt

$$\sin (h_\sigma - 30^\circ) = \frac{\sin (60^\circ - b)}{\sin B} \quad (2a)$$

Aus (1a) und (2a) ergeben sich folgende Höhen des Parryschen Halos im Sonnenvertikal (die Sonnenabstände A sind hinzugefügt):

h_s	0	10	20	25	30	35	40	45	50	60	70	76,6°
h_σ	43,4	44,8	48,7	51,6	54,7	58,4	62,5	67,0	71,8	83,0	97,3	120,0
A	43,4	34,8	28,7	26,6	24,7	23,4	22,5	22,0	21,8	23,0	27,3	43,4

Der Parrysche Halo kann also noch jenseits des Zenits auftreten. Im Sonnenvertikal fällt er mit dem kleinen Ring dann zusammen, wenn der Strahlengang symmetrisch wird, so daß

$$b = \beta = \frac{A}{2} \text{ und folglich } \cos h_s = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin B} \text{ wird,}$$

d. h. bei der Sonnenhöhe $h_s = 49,1^\circ$.

Eine Messung scheint bisher nur von J. P. Koch auf der Danmark-Expedition ausgeführt worden zu sein¹⁾. Sie ergibt für $h_s = 21,1^\circ$ den Wert $h_G = 49,2^\circ$, in hinreichender Übereinstimmung mit der Theorie.

Der Halo von Parry scheint nach den bisherigen Erfahrungen meist als Begleiterscheinung des umschriebenen Halos vorzukommen, wobei dann nur das Stück wahrnehmbar ist, das zwischen den beiden Hörnern des oberen Berührungsbogens liegt. Dabei ist der letztere stets erheblich lichtstärker. Bei denjenigen Sonnenhöhen, bei welchen beide Halos im Sonnenvertikal zusammenfallen, wird nur der umschriebene Halo wahrgenommen. Letzterer ist in zahlreichen Fällen ohne den Parryschen Halo beobachtet worden, auch wenn dieser der Sonnenhöhe nach hätte in Erscheinung treten können. Einwandfreie Beweise dafür, daß der Parrysche Halo auch bei Abwesenheit des umschriebenen Halos aufgetreten wäre, liegen bisher nicht vor. Hieraus geht hervor, daß bei horizontaler Hauptachse die Rotation der Kristalle bzw. das Vorkommen aller Rotationsphasen jedenfalls das Normale ist, und daß nur bisweilen (vielleicht bei besonderer Luftruhe) bei einem Teil der Kristalle auch die Nebenachsen eine orientierende Wirkung ausüben.

Der Parrysche Halo kann nicht der einzige sein, der durch diese Orientierung der Kristalle erzeugt wird. Wie Hastings mit Recht hervorhebt, handelt es sich um eine ganze Gruppe, z. B. muß durch die horizontale Seitenfläche die Untersonne, durch die vertikale Basisfläche der Horizontalring, durch beide zusammen der Zirkumzenitalbogen entstehen. Auch müssen ähnlich dem Parryschen Halo noch weitere quasitangentiale Bogen durch den brechenden Winkel von 60° erzeugt werden, wenn die Sonnenstrahlen an den schrägen Seitenflächen statt an der horizontalen eintreten. Durch den brechenden Winkel von 90° muß bei einem Strahlengang, der im übrigen demjenigen der seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes entspricht, ein Halo entstehen, der diesem ähnlich ist, und durch Spiegelung des Parryschen Halos muß ein dem Gegensoonnenhalo ähnlicher Halo entstehen. Soweit diese Halos identisch sind mit solchen, die auch auf andere Weise entstehen, hat man kein Mittel, die Kristallorientierung festzustellen. In den Fällen des Gegensoonnenhalos und der seitlich unteren Berührungsbogen des großen Ringes müßte es möglich sein, durch genaue Beobachtungen zu entscheiden, um welche Kristallorientierung es sich handelt. Bisher reichen die Beobachtungen wohl dafür nicht aus. Aber nach Analogie des Verhältnisses des Parryschen Halos zum umschriebenen Halo darf man davon ausgehen, daß die rotierenden Kristalle auch hier erheblich lichtstärkere Halos liefern, so daß der Beitrag der Kristalle mit orientierten Nebenachsen überstrahlt wird und nicht in Erscheinung tritt.

Schon der Parrysche Halo dürfte kaum noch zu den Haupthalos zu zählen sein. Um so weniger ist dies bei einer Reihe anderer Erscheinungen der Fall, die so selten sind, daß man bisher die nötigen Grundlagen für eine Theorie kaum als gegeben betrachten kann. Von ihrer Behandlung soll hier abgesehen werden.

Literatur.

- Pernter-Exner, Meteorologische Optik. 2. Auflage, Wien und Leipzig 1922.
 Bravais, Mémoire sur les Halos. Journ. de l'école polytechnique, t. XVIII (21. cahier), Paris 1847.
 G. Galle, Über Höfe und Nebensonnen. Pogg. Ann. Bd. 49, S. 1 und 24.
 Hastings, A general theory of halos. Monthly Weather Review 1920, S. 322.
 Danmark Ekspeditionen til Grönlands Nordöstkyst 1906–08, Bd. 2. (Meddelelser om Grönland 42).
 K. Stuchtey, Untersonnen und Lichtsäulen an Sonne und Mond. Ann. d. Phys. IV. F. 59, 33, 1919.
 A. Wegener, Die Nebensonnen unter dem Horizont. Met. Zeitschrift 1917, S. 295.
 R. Meyer, Haloerscheinungen. Theoretische Beiträge zur meteorologischen Optik. Abhdlg. d. Herder-Inst. zu Riga. Bd. 1, Nr. 5, 1925.

¹⁾ Meddelelser om Grönland XLII, S. 559, 1912.